



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Resolución numérica del problema de Dirichlet para el operador lineal de cuarto orden con métodos de gradiente conjugado

Ricardo Orois Añón

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Resolución numérica del problema de Dirichlet para el operador lineal de cuarto orden con métodos de gradiente conjugado

Ricardo Orois Añón

02/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Matemática Aplicada
Título: Resolución numérica del problema de Dirichlet para el operador lineal de cuarto orden con métodos de gradiente conjugado
Breve descripción do contido
<p>El objetivo de este trabajo es la programación en ordenador de la aproximación numérica de la solución del problema de Dirichlet para el operador lineal de cuarto orden bidimensional mediante la resolución de una formulación mixta que permite expresarlo en términos de las derivadas de segundo orden; este procedimiento presenta además la ventaja de preservar la simetría del problema original. Los sistemas finitodimensionales de matriz definida positiva resultantes de la discretización con elementos finitos afines de Lagrange se resolverán mediante el método del gradiente conjugado que, al tratarse de problemas lineales, convergerá en un número finito de iteraciones.</p>
Recomendacións
<p>Haber superado las materias Análise Numérica Matricial y Métodos Numéricos en Optimización e Ecuacións Diferenciais y estar matriculado en Análise Numérica de Ecuacións en Derivadas Parciais.</p>
Outras observacións

Índice general

Resumen	VIII
Introducción	XI
1. Definiciones y resultados previos	1
2. Resolución con MEF del problema de segundo orden en dim 1	7
2.1. Formulación variacional. Existencia y unicidad de solución	7
2.2. Discretización con MEF del problema variacional	12
2.2.1. Formulación matricial del problema aproximado	14
2.2.2. Tratamiento de las condiciones de contorno	15
2.2.3. Resultados de convergencia	16
2.3. Implementación	17
2.3.1. Cálculo de las matrices y segundos miembros elementales	17
2.3.2. Ensamblado de las matrices y segundo miembro globales	22
3. Resolución con MEF del problema de segundo orden en dim 2	25
3.1. Formulación variacional. Existencia y unicidad de la solución	25
3.2. Problema discretizado y formulación matricial	27
3.2.1. Bloqueo de los grados de libertad asociados a la frontera	29
3.2.2. Resultados de convergencia	31
3.3. Implementación	32
3.3.1. Cálculo de las matrices y segundos miembros elementales	32
3.3.2. Ensamblado de las matrices y segundo miembro globales	36
4. Problemas de cuarto orden	41
4.1. Problema cuarto orden monodimensional	41
4.2. Problema cuarto orden bidimensional	43

5. Método del gradiente conjugado	47
5.1. Métodos de direcciones conjugadas	49
5.2. Método del gradiente conjugado	51
6. Resultados numéricos	55
6.1. Problema monodimensional	55
6.1.1. Resolución numérica del problema de segundo orden	55
6.1.2. Problema de cuarto orden monodimensional	56
6.2. Problema bidimensional	58
6.2.1. Resolución numérica del problema de segundo orden	58
6.2.2. Problema de cuarto orden bidimensional	60
Bibliografía	85

Resumen

En esta memoria se utiliza el MEF para la resolución numérica del problema lineal de cuarto orden con condición de contorno Dirichlet sobre la función y su derivada segunda mediante una formulación mixta en la que solo intervienen operadores de segundo orden. La ventaja de esta manera de proceder reside en que se pueden utilizar elementos finitos de grado uno, por tanto el coste computacional es menor que en la discretización con polinomios de grado tres. El principal inconveniente es que hay que resolver dos sistemas de ecuaciones lineales, pero estos son de menor dimensión y con más ceros del que se obtendría con una discretización directa del problema de cuarto orden.

El método de resolución de estos sistemas será el gradiente conjugado ya que la matriz es simétrica y definida positiva, tridiagonal en el caso 1D y dispersa en el caso 2D. El orden de aproximación obtenido es el mismo, tanto en norma H^1 como en norma L^2 , que para el problema de segundo orden.

Abstract

In this memory a finite element method (FEM) is employed for the numerical solution of the linear fourth order problem. Dirichlet's boundary conditions are prescribed on the function and its second derivative. The method is based on a mixed variational formulation in which only second-order operators are involved. Then, finite elements of degree one can be used. Consequently, the computational cost is smaller than discretizations involving three degree polynomials. Nevertheless, two linear systems must be solved, but they are smaller and with more null coefficients than in a direct finite element discretization of the fourth order equation. The solution is obtained by using a conjugate gradient method thanks to the symmetric and positive defined character of the stiffness matrix, which is tridiagonal in 1D and sparse in 2D. The H^1 and L^2 approximation orders are obtained the same as for the second order problem.

Introducción

Esta memoria trata sobre la resolución numérica del operador lineal de cuarto orden con condición de contorno Dirichlet para la solución y su derivada segunda con el MEF para la discretización y con el método del gradiente conjugado para la resolución de los sistemas.

El método de los elementos finitos (MEF) es un método numérico que permite obtener aproximaciones de las soluciones de ecuaciones diferenciales, tanto ordinarias como en derivadas parciales. Empezó a desarrollarse y a utilizarse masivamente en paralelo a la evolución de ordenadores más potentes. Fue desarrollado por Richard Courant en 1943 para conseguir soluciones aproximadas para un sistema de vibración, y en la década de los 50 se establecieron sus bases matemáticas de una manera rigurosa centrándose en el cálculo de la rigidez y deformación en problemas de mecánica de estructuras. Posteriormente y hasta la actualidad se ha aplicado en otros muchos campos de la física e ingeniería. Con este tipo de técnicas pueden abordarse problemas no lineales de gran complejidad, pero en esta memoria solo consideraremos el problema autoadjunto lineal. La ventaja de este método en relación con otros métodos de discretización, como el de diferencias finitas, es que el MEF está mejor adaptado a las geometrías complicadas que aparecen en problemas de la vida real.

El MEF se basa en el principio de buscar una solución aproximada en un espacio vectorial de dimensión finita que se puede generar con bases de funciones de pequeño soporte (pequeños intervalos en 1D, polígonos en 2D). En esta memoria consideraremos funciones polinómicas de grado uno a trozos que están caracterizadas por sus tres valores en cada uno de los vértices de un triángulo en 2D o en los extremos de un intervalo en 1D. El conjunto de los triángulos con sus nodos se llama malla; en esta memoria se han construido las mallas de los dominios 2D con el `pdetool` de **matlab**. A cada malla está asociada una base de funciones afines a trozos de un espacio vectorial de dimensión finita, de manera que cada elemento de esa base toma el valor uno en un nodo preciso de la malla y cero en todos los demás. Bajo esta condición toda función polinómica de grado uno a trozos admite una única representación en términos de dicha base, siendo los coeficientes

los valores de la función en los nodos de la malla. Para realizar el proceso de discretización es necesario transformar el problema de la forma diferencial a una forma integral también conocida como formulación variacional (o débil). En el caso de un problema lineal esta formulación variacional es equivalente a un sistema de ecuaciones lineales que se construye explícitamente y se resuelve con un método de gradiente conjugado, obteniéndose una aproximación de dimensión finita definida por los valores en los nodos de la malla.

El método del gradiente conjugado que hemos utilizado para la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales generados por las discretizaciones mediante el MEF ha sido inicialmente desarrollado por M. Hestenes y E. Stiefel. Es un algoritmo para resolver de forma numérica sistemas lineales de ecuaciones con matriz simétrica y definida positiva; se considera un método iterativo y es el recomendado (véase [KC91] y [AB84]) para resolver sistemas con matriz de coeficientes de orden grande y dispersas (con muchos ceros) que no pueden ser tratadas con métodos directos debido a el gran coste computacional de estos últimos. En particular, puede probarse que el método del gradiente conjugado, bajo aritmética exacta, obtiene la solución en un número finito de iteraciones.

La combinación de estos dos métodos nos va a permitir en esta memoria abordar la resolución del problema de cuarto orden reduciéndolo mediante una formulación mixta a dos problemas de segundo orden. En el primero se calculará la aproximación de la derivada segunda, o del laplaciano en el problema en dimensión dos, de la que se conoce el valor en la frontera y en el segundo se obtendrá la solución del problema de cuarto orden, también definido a través de su condición de contorno de tipo Dirichlet. La ventaja de esta manera de proceder reside en que para resolver el problema de segundo orden se pueden emplear elementos finitos de grado más bajo que para resolver el problema de cuarto orden. En particular podremos utilizar elementos de grado uno frente elementos de grado tres como mínimo si se aborda la resolución directa de la ecuación de cuarto orden. Los programas se han realizado en **matlab**, que permite utilizar matrices dispersas de una manera muy eficiente. Para la implementación del MEF se ha seguido la planificación de [Oll20], y el método del gradiente conjugado se ha tomado de la asignatura de 'Métodos numéricos en optimización y ecuaciones diferenciales'.

En el capítulo 1 se definen los espacios funcionales y se dan una serie de resultados necesarios para la justificación de la formulación variacional del problema. En el capítulo 2 se detalla la discretización con MEF del problema de segundo orden en dimensión uno, desde la construcción de la formulación variacional, demostración de existencia y unicidad de solución para terminar con la construcción detallada de la discretización con MEF del sistema lineal, con especial atención a los detalles técnicos de la implementación en ordenador. En el capítulo 3 se hace el estudio análogo en dimensión 2, poniendo particular

énfasis en los aspectos que presentan una mayor complejidad debido al incremento de la dimensión. En el capítulo 4 se construyen las formulaciones mixtas para el problema de cuarto orden 1D y 2D tanto en forma diferencial como variacional. El capítulo 5 se dedica al método del gradiente conjugado; en él detallaremos el algoritmo y se recordarán algunos resultados teóricos clásicos sobre sus propiedades y velocidad de convergencia. Finalmente, en el capítulo 6 se presentan resultados numéricos para algunos ejemplos test que muestran que el orden de aproximación obtenido al resolver el problema de cuarto orden es el mismo que el esperado para el problema de segundo orden, tanto para la solución como para su derivada segunda. Más precisamente los resultados numéricos muestran orden uno en norma H^1 y orden dos en norma L^2 .

Capítulo 1

Definiciones y resultados previos

Comenzaremos el trabajo presentando unos conceptos y resultados previos fundamentales para el posterior análisis de la aproximación numérica del operador elíptico autoadjunto de segundo orden en una y dos dimensiones con el método de elementos finitos. Pueden verse más detalles en [Bre84]. En lo que sigue consideraremos siempre funciones medibles.

Definición 1.1. $L^2(a, b) := \{v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \int_a^b v(x)^2 dx < +\infty\}$.

Además la aplicación $\|\cdot\|_{0,2} : L^2(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|v\|_{0,2} := (\int_a^b |v(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$ es una norma en $L^2(a, b)$, y la aplicación $b_1 : L^2(a, b) \times L^2(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$b_1(u, v) = \int_a^b u(x)v(x) dx$$

es un producto escalar respecto del cual el espacio $L^2(a, b)$ es un espacio de Hilbert.

Definición 1.2. $L^\infty(a, b) := \{v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} : \exists C \geq 0 \text{ tal que } |v(x)| \leq C \text{ c.p.d en } (a, b)\}$. La aplicación $\|\cdot\|_{0,\infty} : L^\infty(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|v\|_{0,\infty} := \sup_{x \in [a, b]} |v(x)|$, donde \sup denota el supremo esencial, es una norma en $L^\infty(a, b)$.

Definición 1.3. $\mathcal{D}(a, b) = \{\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \in \mathcal{C}^\infty(a, b), \text{supp}(\varphi) \subseteq (a, b)\}$ = conjunto de funciones de clase infinito y soporte compacto contenido en (a, b) .

Se entenderá el soporte en el sentido de la definición de [Bre84]:

Definición 1.4. Sea $(a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y sea v función definida en (a, b) con valores en \mathbb{R} . Se considera una familia de subconjuntos abiertos $\{\omega_i\}_{i \in I} \subset (a, b)$ tales que para todo $i \in I, v = 0$ c.p.d en ω_i . Sea $\omega = \cup_{i \in I} \omega_i$. Entonces $v = 0$ c.p.d en ω . Se define $\text{supp}(v) = \text{soporte de } v = (a, b) \setminus \omega$.

Denotamos por $\mathcal{D}'(a, b)$ al conjunto de las funciones lineales y continuas sobre $\mathcal{D}(a, b)$. Sus elementos se denominan **distribuciones**.

En esta memoria se identificará cualquier función de $L^2(a, b)$ con la distribución correspondiente.

Para todo $v \in L^2(a, b)$ y para todo $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$ se tiene

$$\int_a^b \varphi'(x)v(x) dx < +\infty,$$

lo que nos permite definir v' como la derivada en el sentido de las distribuciones de la función v mediante la relación

$$\langle v', \varphi \rangle = - \int_a^b \varphi'(x)v(x) dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(a, b).$$

Para la construcción de la formulación variacional del problema de Sturm-Liouville será necesario introducir el espacio de Sobolev:

Definición 1.5. $H^1(a, b) = \{v \in L^2(a, b) : v' \in L^2(a, b)\}.$

Hemos visto anteriormente que toda función $v \in L^2(a, b)$ admite una derivada en el sentido de distribuciones, y es así como se entenderá la v' en la definición 1.5.

La aplicación $\|\cdot\|_{1,2} : H^1(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|v\|_{1,2} := (\|v\|_{0,2}^2 + \|v'\|_{0,2}^2)^{1/2} = \left(\int_a^b [v^2(x) + v'^2(x)] dx \right)^{1/2},$$

es una norma. Consideraremos también la aplicación $|\cdot|_{1,2} : H^1(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$|u|_{1,2}^2 = \int_a^b u'(x)^2 dx.$$

que es una seminorma en $H^1(a, b)$.

Finalmente consideramos la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^1(a, b) \times H^1(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b (u(x)v(x) + u'(x)v'(x)) dx$$

que es un producto escalar respecto del cual el espacio $H^1(a, b)$ es un espacio de Hilbert.

Definición 1.6. Espacio $H_0^1(a, b) = \overline{\mathcal{D}(a, b)}^{H^1(a, b)} =$ adherencia de $\mathcal{D}(a, b)$ en $H^1(a, b)$.

Es un espacio de Hilbert con el producto $a : H_0^1(a, b) \times H_0^1(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

$$a(u, v) = \int_a^b u'(x)v'(x) dx,$$

y $|\cdot|_{1,2}$ es la norma asociada.

Observación 1.7. El espacio $H^1(a, b)$ está contenido en $\mathcal{C}([a, b])$ (véase [Bre84]) por lo que $H_0^1(a, b) = \{v \in H^1(a, b) : v(a) = v(b) = 0\}.$

Analogamente se pueden definir espacios de funciones más regulares, funciones que tienen derivada primera y segunda en $L^2(a, b)$.

Definición 1.8. $H^2(a, b) = \{v \in H^1(a, b) : v'' \in L^2(a, b)\}$.

La aplicación $\|\cdot\|_{2,2} : H^2(a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|v\|_{2,2} := (\|v\|_{0,2}^2 + \|v'\|_{0,2}^2 + \|v''\|_{0,2}^2)^{1/2} = \left(\int_a^b [v^2(x) + v'^2(x) + v''^2(x)] dx \right)^{1/2},$$

es una norma. Consideraremos también la aplicación $|\cdot|_{2,2} : H^2(a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$|u|_{2,2}^2 = \int_a^b u''(x)^2 dx.$$

que es una seminorma en $H^2(a, b)$.

Finalmente consideramos la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^2(a, b) \times H^2(a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b (u(x)v(x) + u'(x)v'(x) + u''(x)v''(x)) dx$$

que es un producto escalar respecto del cual el espacio $H^2(a, b)$ es un espacio de Hilbert.

Definición 1.9. Espacio $H_0^2(a, b) = \overline{\mathcal{D}(a, b)}^{H^2(a, b)}$ = adherencia de $\mathcal{D}(a, b)$ en $H^2(a, b)$.

Es un espacio de Hilbert con el producto

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u''(x)v''(x) dx,$$

y $|\cdot|_{2,2}$ es la norma asociada.

Observación 1.10. El espacio $H^2(a, b)$ está contenido en $\mathcal{C}^1([a, b])$ (véase [Bre84]) por lo que $H_0^2(a, b) = \{v \in H^2(a, b) : v(a) = v'(a) = v(b) = v'(b) = 0\}$.

Para las siguientes definiciones consideraremos Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^2 .

Definición 1.11. $L^2(\Omega) := \{v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} v(x)^2 dx < +\infty\}$.

Además la aplicación $\|\cdot\|_{0,\Omega} : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|v\|_{0,\Omega} := (\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx)^{1/2}$ es una norma en $L^2(\Omega)$, y la aplicación $b_1 : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$b_1(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx$$

es un producto escalar respecto del cual el espacio $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Definición 1.12. $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2\}$.

La aplicación $\|\cdot\|_{1,\Omega} : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|v\|_{1,\Omega} := \left(\|v\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

es una norma. Consideraremos también la aplicación $|\cdot|_{1,\Omega} : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$|u|_{1,\Omega}^2 = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx = \|\nabla u\|_{0,\Omega}^2$$

que es una seminorma en $H^1(\Omega)$.

Finalmente consideramos la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \left(u(x)v(x) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx$$

que es un producto escalar respecto del cual el espacio $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Observación 1.13. En general $H^1(\Omega)$ no es un espacio de funciones continuas; puede verse un contraejemplo en [RT83].

Definición 1.14. Espacio $H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$ = adherencia de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$.

Es un espacio de Hilbert con el producto $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx,$$

y $|\cdot|_{1,\Omega}$ es la norma asociada.

Observación 1.15. Si Ω es un abierto de frontera suficientemente regular (para más detalles veáse [RT83]) se puede dotar de sentido la restricción de una función de $H^1(\Omega)$ a $\partial\Omega$, en virtud de lo cual, diremos que las funciones de $H_0^1(\Omega)$ son aquellas que se anulan en $\partial\Omega$.

Definición 1.16. $H^2(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), i, j = 1, 2\}$.

La aplicación $\|\cdot\|_{2,\Omega} : H^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|v\|_{2,\Omega} := \left(\|v\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

es una norma. Consideraremos también la aplicación $|\cdot|_{2,\Omega} : H^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$|u|_{2,\Omega}^2 = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dx.$$

que es una seminorma en $H^2(\Omega)$.

Finalmente consideramos la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^2(\Omega) \times H^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \left(u(x)v(x) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx$$

que es un producto escalar respecto del cual el espacio $H^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Observación 1.17. $H^2(\Omega)$ esta contenido en $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, esto es las funciones de $H^2(\Omega)$ son continuas, en particular se pueden extender por continuidad a la frontera del abierto.

Definición 1.18. Espacio $H_0^2(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^2(\Omega)}$ = adherencia de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H^2(\Omega)$.

Es un espacio de Hilbert con el producto

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx$$

Observación 1.19. Si el abierto es de frontera suficientemente regular (vease [RT83]), se puede dotar de sentido la restricción de $u \in H^2(\Omega)$ a $\partial\Omega$, lo mismo que su derivada normal $\nabla u \cdot \eta$. Por ello diremos que las funciones de $H_0^2(\Omega)$ serán las funciones nulas en la frontera y con derivada normal también nula.

En la siguiente proposición basta cambiar $H_0^1(\Omega)$ por $H_0^1(a, b)$ para tener el caso de dimensión 1.

Un resultado de gran interés acerca de las funciones de $H_0^1(\Omega)$ es:

Proposición 1.20 (Desigualdad de Poincaré). *Existe una constante $k \in \mathbb{R}, k > 0$ tal que:*

$$\|v\|_{0,\Omega} \leq k \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Observación 1.21. Una consecuencia de la proposición anterior, ya anticipada, es que la aplicación $|\cdot|_{1,2}$ es una norma en $H_0^1(\Omega)$.

Enunciamos a continuación el resultado que permitirá establecer la existencia y unicidad de solución de la formulación variacional del problema del problema elíptico autoadjunto de segundo orden.

Teorema 1.22 (Lax-Milgram). *Sea H un espacio de Hilbert y sea $\mathbb{A} : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal, continua y coercitiva. Sea $\mathbb{L} : H \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua sobre H . Entonces existe un único $u_0 \in H$ tal que:*

$$\mathbb{A}(u_0, v) = \mathbb{L}(v) \quad \forall v \in H.$$

Capítulo 2

Resolución numérica con elementos finitos del problema de segundo orden en dimensión uno

En este capítulo se estudia la resolución mediante MEF (método de elementos finitos) del problema de contorno de Sturm-Liouville de segundo orden con condición de contorno Dirichlet para la función en la derivada segunda. Más precisamente se considera el problema (\mathcal{P}) :

$$\begin{aligned} &\text{Dados } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad f \in L^2(a, b) \\ &p \in H^1(a, b), \quad q \in L^\infty(a, b), \quad p(x) \geq \alpha > 0, \quad q(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b], \\ &\text{determinar } u \in H^2(a, b) \text{ tal que :} \end{aligned}$$

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du(x)}{dx}\right) + q(x)u(x) = f(x) \text{ en } (a, b) \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta. \end{cases}$$

Para abordar la resolución numérica de (\mathcal{P}) mediante MEF, será necesario realizar una formulación variacional y un posterior proceso de discretización.

2.1. Formulación variacional. Existencia y unicidad de solución

Se considera $v \in D(a, b)$ una función escalar arbitraria de clase infinito con un soporte compacto en el intervalo (a, b) , entonces $v(a) = v(b) = 0$. Multiplicando la ecuación diferencial del problema (\mathcal{P}) por v e integrando en $[a, b]$ nos queda:

$$\int_a^b -\frac{d}{dx}(p(x)u'(x))v(x) + q(x)u(x)v(x) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx \text{ en } (a, b).$$

Por la linealidad de las integrales tenemos:

$$\int_a^b -\frac{d}{dx}(p(x)u'(x))v(x) dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx \quad (2.1)$$

Integrando por partes en el primer sumando nos queda:

$$\int_a^b -(p(x)u'(x))'v(x) dx = -v(x)(p(x)u'(x)) \Big|_a^b - \int_a^b -p(x)u'(x)v'(x) dx = \quad (2.2)$$

$$= -v(b)p(b)u'(b) + v(a)p(a)u'(a) + \int_a^b p(x)u'(x)v'(x) dx = \quad (2.3)$$

$$= \int_a^b p(x)u'(x)v'(x) dx, \quad (2.4)$$

ya que $v(b) = v(a) = 0$.

Observación 2.1. La expresión (2.4) tiene sentido para $u \in H^1(a, b)$ y $v \in H_0^1(a, b)$, mientras que el segundo sumando en (2.1) está bien definido con $u, v \in L^2(a, b)$ y el tercero para $v \in L^2(a, b)$.

Observación 2.2. Para el caso de condición de contorno Neumann no se pueden eliminar los términos de frontera (véase [Bre84]).

Se obtiene así la formulación variacional de (\mathcal{P}) :

$$(\mathcal{PV}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } u \in H^1(a, b) \text{ tal que } u(a) = \alpha, u(b) = \beta, \text{ verificando} \\ \int_a^b p(x)u'(x)v'(x) dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(a, b). \end{array} \right.$$

Definiendo

$$\mathbb{A} : H^1(a, b) \times H^1(a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \quad y \quad \mathbb{L} : H_0^1(a, b) \longrightarrow \mathbb{R},$$

como:

$$\mathbb{A}(u, v) = \int_a^b p(x)u'(x)v'(x) dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x) dx \quad y \quad \mathbb{L}(v) = \int_a^b f(x)v(x) dx,$$

podemos entonces reescribir el problema variacional anterior de la siguiente forma:

$$(\mathcal{PV}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } u \in H^1(a, b) \text{ tal que } u(a) = \alpha, u(b) = \beta, \text{ verificando} \\ \mathbb{A}(u, v) = \mathbb{L}(v) \quad \forall v \in H_0^1(a, b) \end{array} \right.$$

La existencia de solución del problema para $\alpha = \beta = 0$ puede probarse gracias al siguiente resultado que es un caso particular del teorema 1.22.

Teorema 2.3. Sean

$$\mathbb{A} : H_0^1(a, b) \times H_0^1(a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \quad y \quad \mathbb{L} : H_0^1(a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Entonces

1 \mathbb{A} es bilineal y continua, esto es, existe una constante $C_1 > 0$ tal que

$$|\mathbb{A}(u, v)| \leq C_1 \|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2} \quad \forall u, v \in H_0^1(a, b).$$

2 \mathbb{L} es una aplicación lineal continua, esto es, existe una constante $C_2 > 0$ tal que

$$|\mathbb{L}(v)| \leq C_2 \|v\|_{1,2} \quad \forall v \in H_0^1(a, b).$$

3 \mathbb{A} es coercitiva, esto es, existe una constante real positiva α tal que

$$\mathbb{A}(v, v) \geq \alpha \|v\|_{1,2}^2 \quad \forall v \in H_0^1(a, b).$$

4 Existe un único $u_0 \in H_0^1(a, b)$ tal que

$$\mathbb{A}(u_0, v) = \mathbb{L}(v) \quad \forall v \in H_0^1(a, b).$$

Demostración. Empezaremos la demostración probando la bilinealidad y continuidad de \mathbb{A} y la linealidad y continuidad de \mathbb{L} .

Bilinealidad y linealidad:

$$\mathbb{A}(u, \alpha v + \beta w) = \alpha \mathbb{A}(u, v) + \beta \mathbb{A}(u, w) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall u, v, w \in H_0^1(a, b),$$

$$\mathbb{A}(\alpha u + \beta v, w) = \alpha \mathbb{A}(u, w) + \beta \mathbb{A}(v, w) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall u, v, w \in H_0^1(a, b),$$

$$\mathbb{L}(\alpha v + \beta w) = \alpha \mathbb{L}(v) + \beta \mathbb{L}(w) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall v, w \in H_0^1(a, b),$$

gracias a la linealidad de la derivada y de la integral.

Continuidad:

$$|\mathbb{L}(v)| = \left| \int_a^b f(x) v(x) dx \right| \leq \|f\|_{0,2} \|v\|_{0,2} \leq \|f\|_{0,2} \|v\|_{1,2},$$

gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la definición de la norma de $H^1(a, b)$. Por tanto \mathbb{L} es continua.

Análogamente

$$|\mathbb{A}(u, v)| \leq \left| \int_a^b p(x)u'(x)v'(x) dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x) dx \right| \leq \|p\|_{0,\infty} \|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2} + \quad (2.5)$$

$$+ \|q\|_{0,\infty} \|u\|_{0,2} \|v\|_{0,2} \leq \|p\|_{0,\infty} \|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2} + \|q\|_{0,\infty} \|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2} \leq \quad (2.6)$$

$$\leq (\|p\|_{0,\infty} + \|q\|_{0,\infty}) \|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2}. \quad (2.7)$$

Coercitividad de \mathbb{A} . Para $u \in H_0^1(a, b)$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x)(u'(x))^2 dx &\geq \int_a^b \alpha(u'(x))^2 dx \geq \alpha \int_a^b |u'(x)|^2 dx \geq \alpha |u(x)|_{1,2}^2 \geq \frac{\alpha}{2} |u|_{1,2}^2 + \frac{\alpha}{2k^2} \|u\|_{0,2}^2 \geq \\ &\geq \min\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2k^2}\right) \|u\|_{1,2}^2 \end{aligned}$$

siendo k la constante de la desigualdad de Poincaré 1.20. Además como $q(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$ se tiene

$$\int_a^b q(x)u(x)^2 dx \geq 0 \quad y \text{ por tanto } \mathbb{A}(u, u) \geq \min\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2k^2}\right) \|u\|_{1,2}^2.$$

Finalmente el apartado 4 es aplicación directa al problema (\mathcal{PV}_0)

$$(\mathcal{PV}_0) \begin{cases} \text{Hallar } u_0 \in H_0^1(a, b) \text{ tal que} \\ \mathbb{A}(u_0, v) = \mathbb{L}(v) \quad \forall v \in H_0^1(a, b) \end{cases}$$

del teorema de Lax-Milgram 1.22.

□

Observación 2.4. Nótese que una acotación alternativa a (2.7) sería

$$|\mathbb{A}(u, v)| \leq (\|p\|_{0,\infty} + k^2 \|q\|_{0,\infty}) \|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2}$$

siendo k la constante de la desigualdad de Poincaré 1.20. De la misma manera nos quedan

$$|\mathbb{A}(u, u)| \geq \alpha |u|_{1,2}^2 \quad y \quad |\mathbb{L}(v)| \leq k \|f\|_{0,2} \|v\|_{1,2}.$$

Se demuestra a continuación la existencia y unicidad de solución del problema no homogéneo.

Proposición 2.5. 1) Dada $u \in H^1(a, b)$ se considera la descomposición $u = \hat{u} + u_0 \in H^1(a, b)$, con $\hat{u} \in H^1(a, b)$ tal que $\hat{u}(a) = \alpha, \hat{u}(b) = \beta$, y $u_0 = u - \hat{u} \in H_0^1(a, b)$. El problema variacional (\mathcal{PV}) es equivalente a

$$(\hat{\mathcal{PV}}_0) \begin{cases} \text{Hallar } u_0 \in H_0^1(a, b) \text{ tal que} \\ \mathbb{A}(u_0, v) = \hat{\mathbb{L}}(v) = \mathbb{L}(v) - \mathbb{A}(\hat{u}, v) \quad \forall v \in H_0^1(a, b). \end{cases}$$

2.1. FORMULACIÓN VARIACIONAL. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN 11

2) El problema variacional (\mathcal{PV}) tiene solución única.

Demostración. 1) Por la linealidad de \mathbb{A} en la primera componente resulta

$$\mathbb{A}(u, v) = \mathbb{A}(u_0 + \hat{u}, v) = \mathbb{A}(u_0, v) + \mathbb{A}(\hat{u}, v).$$

Entonces

$$\mathbb{A}(u, v) = \mathbb{L}(v) \quad \forall v \in H_0^1(a, b).$$

es equivalente a

$$\mathbb{A}(u_0, v) = \hat{\mathbb{L}}(v) = \mathbb{L}(v) - \mathbb{A}(\hat{u}, v) \quad \forall v \in H_0^1(a, b),$$

donde $\hat{\mathbb{L}} : H_0^1(a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal continua.

2) Por el teorema 2.3 el problema $(\hat{\mathcal{PV}}_0)$ tiene solución única, por tanto dada \hat{u} existe una única $u_0 \in H_0^1(a, b)$ solución de $(\hat{\mathcal{PV}}_0)$ y $u = u_0 + \hat{u}$ es solución de (\mathcal{PV}) . Queda por demostrar que es independiente de la función $\hat{u} \in H^1(a, b)$ elegida.

Sea $u^1 = u_0^1 + \hat{u}^1$ y $u^2 = u_0^2 + \hat{u}^2$ dos soluciones de (\mathcal{PV}) . Entonces

$$\mathbb{A}(u^1, v) = \mathbb{L}(v) = \mathbb{A}(u^2, v) \quad \forall v \in H_0^1(a, b),$$

lo que implica que

$$\mathbb{A}(u^1 - u^2, v) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(a, b)$$

Tomando $v = u^1 - u^2 \in H_0^1(a, b)$ se concluye que $u^1 = u^2$ por la coercitividad de \mathbb{A} . \square

Observación 2.6. La descomposición de la proposición anterior no es única. Una de las más sencillas en la que se puede pensar sería $\hat{u} \in \mathbb{P}_1$ con

$$\hat{u}(x) = \alpha \frac{x-b}{a-b} + \beta \frac{x-a}{b-a}.$$

Para terminar esta sección señalaremos que una función solución del problema diferencial (\mathcal{P}) siempre es solución del problema variacional (\mathcal{PV}) . El recíproco solo sería cierto si la solución $u \in H^1(a, b)$ es suficientemente regular, esto es si la solución de (\mathcal{PV}) está en $H^2(a, b)$ y entonces sería también la solución fuerte. En el caso de que no esté en $H^2(a, b)$ el problema diferencial no tendría solución.

Observación 2.7. Si se considera que f y q son continuas y $p \in \mathcal{C}^1(a, b)$, entonces se puede sustituir $H^2(a, b)$ por $\mathcal{C}^2(a, b)$.

2.2. Discretización con MEF del problema variacional

El objetivo del MEF es construir una aproximación en un espacio de dimensión finita de la solución del problema variacional (\mathcal{PV}) , para ello se considera una partición del intervalo $[a, b]$ en $N + 1$ subintervalos

$$[a, b] = \cup_{i=0}^N [a_i, a_{i+1}] = \cup_{i=0}^N T_i,$$

con $T_i = [a_i, a_{i+1}]$, $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{N+1} = b$ y siendo la longitud del intervalo i -ésimo h_i definida como

$$h_i = a_{i+1} - a_i, \quad i = 0, \dots, N.$$

A los puntos a_i le llamaremos nodos de discretización.

Sea $\mathbb{P}_1 = \langle \{1, x\} \rangle$ el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 1. Se define el espacio de los elementos finitos

$$X_h := \{v_h \in H^1(a, b) : v_h|_{[a_i, a_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1, i = 0, \dots, N\},$$

formado por las funciones continuas y afines en cada uno de los subintervalos T_i de la forma

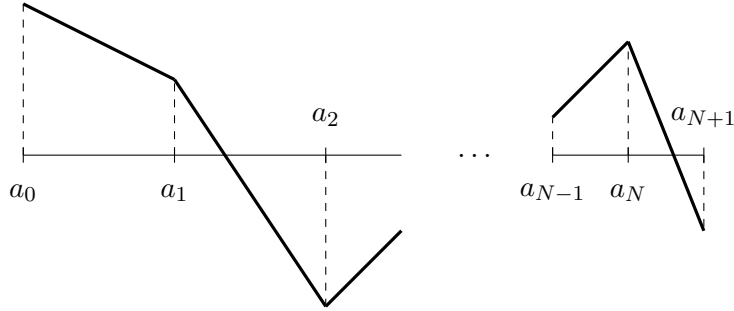


Figura 2.1: Funciones afines en (a, b)

Se denota por V_{h0} al espacio de las funciones de X_h que verifiquen las condiciones de contorno homogéneas, esto es

$$V_{h0} = \{v_h \in X_h : v_h(a) = 0, \quad v_h(b) = 0\} \subset H_0^1(a, b).$$

La discretización de (\mathcal{PV}) consiste en buscar la solución del problema aproximado:

$$\begin{cases} \text{Determinar } u_h \in X_h \text{ tal que } u_h(a) = \alpha, u_h(b) = \beta, \text{ solución de} \\ \int_a^b p(x)u_h'(x)v_h'(x) dx + \int_a^b q(x)u_h(x)v_h(x) dx = \int_a^b f(x)v_h(x) dx \quad \forall v_h \in V_{h0}. \end{cases}$$

Con las notaciones de la sección anterior se tiene:

$$(\mathcal{PV}_h) \begin{cases} \text{Hallar } u_h \in X_h \text{ tal que } u_h(a) = \alpha, u_h(b) = \beta, \text{ solución de} \\ \mathbb{A}(u_h, v_h) = \mathbb{L}(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases}$$

Considerando unas bases adecuadas de los espacios X_h y V_{h0} , la formulación discreta puede reescribirse como un sistema de ecuaciones lineales muy sencillo de construir. Para cada nodo $a_j \in [a, b]$, $j = 1, \dots, N$ se define la función de base

$$\varphi_h^j(x) = \begin{cases} \frac{x - a_{j-1}}{a_j - a_{j-1}} & \text{si } x \in [a_{j-1}, a_j] \\ \frac{x - a_{j+1}}{a_j - a_{j+1}} & \text{si } x \in [a_j, a_{j+1}] \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además en los extremos se tienen las funciones

$$\varphi_h^0(x) = \begin{cases} \frac{x - a_1}{a_0 - a_1} & \text{si } x \in [a_0, a_1] \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$\varphi_h^{N+1}(x) = \begin{cases} \frac{x - a_N}{a_{N+1} - a_N} & \text{si } x \in [a_N, a_{N+1}] \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Las funciones $\{\varphi_h^i\}_{i=0}^{N+1}$ son linealmente independientes en $H^1(a, b)$ y $V_{h0} = \langle \{\varphi_h^1, \dots, \varphi_h^N\} \rangle$ y $X_h = \langle \{\varphi_h^0, \dots, \varphi_h^{N+1}\} \rangle$. Entonces cualquier función $v_h \in V_{h0}$ puede escribirse de manera única como

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^N v_h(a_j) \varphi_h^j(x),$$

y análogamente las funciones $v_h \in X_h$ pueden escribirse de manera única como

$$v_h(x) = \sum_{j=0}^{N+1} v_h(a_j) \varphi_h^j(x).$$

Introduciendo las combinaciones lineales anteriores en (\mathcal{PV}_h) el problema discretizado puede expresarse como

$$(\mathcal{PV}_h) \begin{cases} \text{Hallar } u_h \in X_h \text{ tal que } u_h(a) = \alpha, u_h(b) = \beta, \text{ solución de} \\ \mathbb{A}(\sum_{j=0}^{N+1} u_h(a_j) \varphi_h^j, \sum_{j=1}^N v_h(a_j) \varphi_h^j) = \mathbb{L}(\sum_{j=1}^N v_h(a_j) \varphi_h^j) \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases}$$

Gracias a la bilinealidad de \mathbb{A} y a la linealidad de \mathbb{L} , nótese que

$$\begin{aligned} \mathbb{A}\left(\sum_{j=0}^{N+1} u_h(a_j) \varphi_h^j, \sum_{i=1}^N v_h(a_i) \varphi_h^i\right) &= \sum_{i=1}^N v_h(a_i) \mathbb{A}\left(\sum_{j=0}^{N+1} u_h(a_j) \varphi_h^j, \varphi_h^i\right) = \mathbb{L}\left(\sum_{i=1}^N v_h(a_i) \varphi_h^i\right) = \\ &= \sum_{i=1}^N v_h(a_i) \mathbb{L}(\varphi_h^i). \end{aligned}$$

por lo que es suficiente considerar la igualdad en los elementos de la base V_{h0}

$$\mathbb{A}\left(\sum_{j=0}^{N+1} u_h(a_j) \varphi_h^j, \varphi_h^i\right) = \mathbb{L}(\varphi_h^i) \quad \text{con } i = 1, \dots, N.$$

Por ello finalmente el problema variacional discretizado se expresa como

$$(\mathcal{P}\hat{\mathcal{V}}_h) \begin{cases} \text{Hallar } u_h = \sum_{j=0}^{N+1} U_h^j \varphi_h^j, & U_h^0 = \alpha, \quad U_h^{N+1} = \beta \\ \text{tal que } \mathbb{A}(u_h, \varphi_h^i) = \mathbb{L}(\varphi_h^i) & i = 1, \dots, N \end{cases}$$

siendo $U_h^j = u_h(a_j), j = 0, \dots, N+1$.

2.2.1. Formulación matricial del problema aproximado

Atendiendo a que las n ecuaciones de $(\mathcal{P}\hat{\mathcal{V}}_h)$ son lineales y que

$$u_h = \alpha \varphi_h^0 + \beta \varphi_h^{N+1} + \sum_{j=1}^N U_h^j \varphi_h^j$$

escribimos

$$\mathbb{A}(u_h, \varphi_h^j) = \mathbb{A}\left(\sum_{k=0}^{N+1} U_h^k \varphi_h^k, \varphi_h^j\right) = \sum_{k=0}^{N+1} U_h^k \mathbb{A}(\varphi_h^k, \varphi_h^j) = \mathbb{L}(\varphi_h^j).$$

Definiendo $(Z_h)_{jk} = \mathbb{A}(\varphi_h^k, \varphi_h^j)$ el coeficiente (j, k) -ésimo de la matriz $Z_h \in M_{N \times (N+2)}$ y $(C_h)_j = \mathbb{L}(\varphi_h^j)$, la componente j -ésima del vector $C_h \in \mathbb{R}^N$ la igualdad anterior se reescribe en notación matricial

$$(\mathcal{P}_h) : Z_h U_h = C_h.$$

Con el fin de separar en la formulación variacional los términos con derivadas de primer orden y los de orden cero introducimos las formas bilineales

$$\begin{aligned} a : H^1(a, b) \times H^1(a, b) &\longrightarrow \mathbb{R}, & b : L^2(a, b) \times L^2(a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a(u, v) &= \int_a^b p(x) u'(x) v'(x) dx & b(u, v) &= \int_a^b q(x) u(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

De esta manera

$$\mathbb{A}(u, v) = \int_a^b p(x)u'(x)v'(x) dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x) = a(u, v) + b(u, v)$$

Observación 2.8. Bajo esta notación podemos reescribir $(\hat{\mathcal{P}}\mathcal{V}_h)$ como:

$$\begin{cases} \text{Hallar } u_h \in X_h \text{ con } u_h(a) = \alpha, u_h(b) = \beta \text{ tal que} \\ a(u_h, \varphi_h^j) + b(u_h, \varphi_h^j) = \mathbb{L}(\varphi_h^j) \quad j = 1, \dots, N. \end{cases}$$

En la forma bilineal \mathbb{A} aparecen dos sumandos, el correspondiente a la forma bilineal b que llamaremos término de masa, y el correspondiente a la forma bilineal a que llamaremos término de rigidez. Así tenemos que $Z_h = M_h + A_h$, con $(M_h)_{i,j} = b(\varphi_h^j, \varphi_h^i)$ la matriz de masa y $(A_h)_{i,j} = a(\varphi_h^j, \varphi_h^i)$ la matriz de rigidez. De esta manera el problema variacional discreto (\mathcal{P}_h) quedaría

$$(\hat{P}_h) : A_h U_h + M_h U_h = C_h.$$

2.2.2. Tratamiento de las condiciones de contorno

De la misma manera a como se procedió en el problema continuo buscaremos U_h^1, \dots, U_h^N ya que $U_h^0 = \alpha, U_h^{N+1} = \beta$ son conocidas por las condiciones de contorno. Señalemos en primer lugar que $a(\varphi_h^0, \varphi_h^i) = b(\varphi_h^0, \varphi_h^i) = 0$ para $i \geq 2$ y $a(\varphi_h^{N+1}, \varphi_h^i) = b(\varphi_h^{N+1}, \varphi_h^i) = 0$ para $i \leq N-1$ ya que la intersección de los soportes por construcción es de medida nula. Por ello se puede escribir $\hat{C}_h^1 = C_h^1 - \alpha(a(\varphi_h^0, \varphi_h^1) + b(\varphi_h^0, \varphi_h^1))$ y $\hat{C}_h^N = C_h^N - \beta(a(\varphi_h^{N+1}, \varphi_h^N) + b(\varphi_h^{N+1}, \varphi_h^N))$, y el sistema quedaría

$$\begin{pmatrix} z_{1,1} & \dots & z_{1,N} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ z_{N,1} & \dots & z_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - a_{1,0}\alpha - b_{1,0}\alpha \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ c_N - a_{N,N+1}\beta - b_{N,N+1}\beta \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

que es el sistema asociado a (\mathcal{P}_h) con lo que llamaremos bloqueo, es decir introduciendo las condiciones de contorno.

Observación 2.9. En la práctica en programación es preferible escribir el sistema 2.8 de la

forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ z_{1,0} & z_{1,1} & \dots & z_{1,N} & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & z_{l,1} & \dots & z_{l,N} & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & z_{N,1} & \dots & z_{N,N} & z_{N,N+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_l \\ \vdots \\ u_N \\ u_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ c_1 \\ \vdots \\ c_l \\ \vdots \\ c_N \\ \beta \end{pmatrix}$$

donde

$$z_{1,0} = \mathbb{A}(\varphi_h^0, \varphi_h^1) = a(\varphi_h^0, \varphi_h^1) + b(\varphi_h^0, \varphi_h^1) = a_{1,0} + b_{1,0}$$

$$z_{N,N+1} = \mathbb{A}(\varphi_h^{N+1}, \varphi_h^N) = a(\varphi_h^{N+1}, \varphi_h^N) + b(\varphi_h^{N+1}, \varphi_h^N) = a_{N,N+1} + b_{N,N+1}.$$

Nótese que no es simétrica, para preservar la simetría hay que corregir también el segundo miembro. De hecho en el programa se hace el bloqueo de esa forma para poder aplicar el gradiente conjugado.

Observación 2.10. Otra manera de interpretarlo sería tomar $\hat{u} = \alpha\varphi_h^0 + \beta\varphi_h^{N+1}$ con $u = u_0 + \hat{u}$ en el teorema 2.3.

2.2.3. Resultados de convergencia

Para terminar la sección enunciaremos los resultados sobre la convergencia del esquema de discretización propuesto y la influencia del uso de fórmulas de cuadratura en el cálculo de la matriz de masa y segundo miembro.

Los resultados de aproximación se pueden probar con particiones bajo la hipótesis:

(H): existe $\nu > 0$ tal que $h = \max\{h_i, i = 0, \dots, N\} \leq \nu h_i, i = 0, \dots, N$.

El siguiente resultado es un caso particular del teorema 5.1-4 de [RT83]

Teorema 2.11. *El método de elementos finitos con funciones de base afines a trozos es convergente, esto es*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{1,2} = 0$$

Además si $u \in H^2(a, b)$ existe una constante C , independiente de h tal que

$$\|u - u_h\|_{1,2} \leq Ch|u|_{2,2}.$$

Pueden obtenerse también estimaciones de error en norma $L^2(a, b)$.

Teorema 2.12. *En las hipótesis del teorema anterior si $p \in \mathcal{C}^1(a, b)$ entonces*

$$\|u - u_h\|_{0,2} \leq Ch^2|u|_{2,2}.$$

En el caso de que las integrales se calculen de forma aproximada con fórmulas de cuadratura numérica (como detallaremos en la sección siguiente), el esquema discretizado así construido también es convergente, bajo condiciones adicionales de regularidad sobre f y p (véase [Cia91]).

2.3. Implementación

En esta sección se describirá el proceso de implementación en ordenador de la resolución numérica con el MEF del problema variacional. Consta de varias partes: construcción de las matrices de masa y de rigidez, del sistema lineal (\mathcal{P}_h) y resolución numérica del sistema.

2.3.1. Cálculo de las matrices y segundos miembros elementales

En la elaboración del código se ha realizado el cálculo elemento a elemento que es la manera usual de hacerlo sobre todo en el caso de dimensión superior.

Por la aditividad de la integral en el intervalo (a, b) tenemos

$$(A_h)_{ij} = \int_a^b p(x)(\varphi_h^j)'(x)(\varphi_h^i)'(x) dx = \sum_{k=0}^N \int_{T_k} p(x)(\varphi_h^i)'(x)(\varphi_h^j)'(x) dx$$

$$\sum_{k=0}^N \int_{T_k} p(x)(\varphi_h^i)'(x)(\varphi_h^j)'(x) dx = \begin{cases} \int_{T_i} p(x)(\varphi_h^i)'(x)(\varphi_h^j)'(x) dx & \text{si } j = i + 1 \\ \int_{T_j} p(x)(\varphi_h^i)'(x)(\varphi_h^j)'(x) dx & \text{si } i = j + 1 \\ \int_{T_{i-1} \cup T_i} p(x)(\varphi_h^i)'^2(x) dx & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

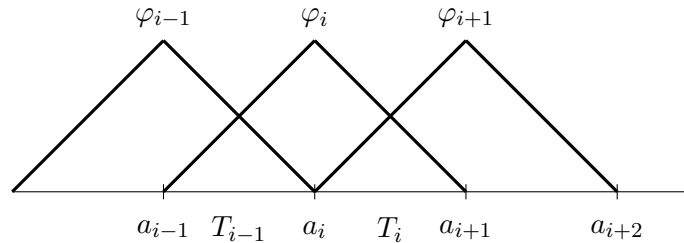


Figura 2.2: Funciones de base en el intervalo $[a_{i-1}, a_{i+1}]$

Lo anterior indica que un buen procedimiento es calcular los términos correspondientes al elemento T_i , lo que llamaremos la matriz elemental asociada al elemento T_i y añadiremos su contribución correspondiente a la matriz global Z_h . Notese que solo φ_h^i y φ_h^{i+1} son no nulos en T_i por lo que $A_h^{T_i}$, matriz de rigidez elemental (respectivamente $M_h^{T_i}$, matriz de masa elemental) solo tienen coeficientes no nulos en las entradas $(i, i)(i + 1, i)(i, i + 1)(i + 1, i + 1)$. Cuando se halla añadido a las matrices globales la contribución de todos los elementos se habrá llegado a una matriz tridiagonal:

$$(Z_h)_{ij} = 0 \quad \text{si } |j - i| \geq 2 \quad 0 \leq i, j \leq N + 1.$$

Analogamente la componente i -ésima del segundo miembro se calcula integrando en los intervalos T_{i-1} y T_i , el soporte de la función φ_h^i ,

$$(C_h)_i = \int_{T_{i-1} \cup T_i} f(x) \varphi_h^i(x) dx.$$

A partir de ahora en el intervalo T_i solo trabajaremos con las funciones $\varphi_h^i, \varphi_h^{i+1}$

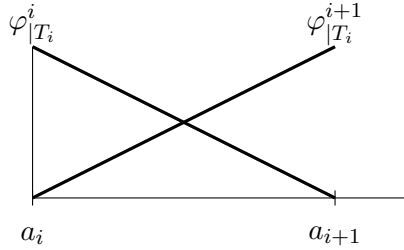


Figura 2.3: Funciones de base de intervalo T_i .

Se define

$$[P^{T_i}] = [\varphi_{h|T_i}^i \quad \varphi_{h|T_i}^{i+1}], \quad [DP^{T_i}] = [\varphi'_{h|T_i}^i \quad \varphi'_{h|T_i}^{i+1}],$$

de manera que toda función afín en el intervalo se representa

$$v_{h|T_i} = V_h^i \varphi_{h|T_i}^i + V_h^{i+1} \varphi_{h|T_i}^{i+1} = [P^{T_i}] \begin{pmatrix} V_h^i \\ V_h^{i+1} \end{pmatrix} \quad \text{con } V_h^j = v_h(a_j), j = i, i + 1$$

y análogamente

$$u_{h|T_i} = U_h^i \varphi_{h|T_i}^i + U_h^{i+1} \varphi_{h|T_i}^{i+1}.$$

Calculando en T_i las formas bilineales a y b quedaría

$$a(u_{h|T_i}, v_{h|T_i}) = (V_h^i, V_h^{i+1}) \begin{bmatrix} \int_{T_i} \varphi_h^i \varphi_h^i & \int_{T_i} \varphi_h^i \varphi_h^{i+1} \\ \int_{T_i} \varphi_h^{i+1} \varphi_h^i & \int_{T_i} \varphi_h^{i+1} \varphi_h^{i+1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_h^i \\ U_h^{i+1} \end{pmatrix} = (V_h^i, V_h^{i+1}) A_h^{T_i} \begin{pmatrix} U_h^i \\ U_h^{i+1} \end{pmatrix}$$

siendo $A_h^{T_i} \in M_{2 \times 2}$ la matriz de rigidez elemental, y

$$b(u_{h|T_i}, v_{h|T_i}) = (V_h^i, V_h^{i+1}) \begin{bmatrix} \int_{T_i} \varphi_h^i \varphi_h^i & \int_{T_i} \varphi_h^i \varphi_h^{i+1} \\ \int_{T_i} \varphi_h^{i+1} \varphi_h^i & \int_{T_i} \varphi_h^{i+1} \varphi_h^{i+1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_h^i \\ U_h^{i+1} \end{pmatrix} = (V_h^i, V_h^{i+1}) M_h^{T_i} \begin{pmatrix} U_h^i \\ U_h^{i+1} \end{pmatrix}$$

siendo $M_h^{T_i} \in M_{2 \times 2}$ la matriz de masa elemental.

Finalmente la contribución del elemento T_i al segundo miembro sería

$$\mathbb{L}(v_{h|T_i}) = (V_h^i, V_h^{i+1}) \begin{bmatrix} \int_{T_i} f \varphi_h^i \\ \int_{T_i} f \varphi_h^{i+1} \end{bmatrix} = (V_h^i, V_h^{i+1}) C_h^{T_i},$$

siendo $C_h^{T_i}$ el segundo miembro elemental.

Observación 2.13. En notación abreviada

$$A_h^{T_i} = \int_{T_i} [DP^{T_i}]^t(x) p(x) [DP^{T_i}](x) dx,$$

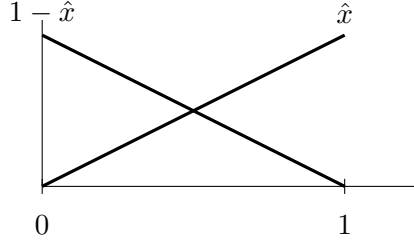
$$M_h^{T_i} = \int_{T_i} [P^{T_i}]^t(x) q(x) [P^{T_i}](x) dx,$$

$$C_h^{T_i} = \int_{T_i} f(x) [P^{T_i}]^t(x) dx,$$

Cálculo en el elemento de referencia

El cálculo de matrices y segundos miembros elementales se pueden unificar y ser realizados en un elemento de referencia \hat{T} sin más que pasar por un cambio de variable que depende del elemento considerado. En \hat{T} las funciones de base afines son (véase figura 2.3.1)

$$\hat{\varphi}_1(\hat{x}) = 1 - \hat{x}, \quad \hat{\varphi}_2(\hat{x}) = \hat{x}.$$

Figura 2.4: Funciones en el elemento de referencia $[0, 1]$

Para el elemento T_i se realiza el cambio de variable:

$$F_i : [0, 1] = \hat{T} \longrightarrow T_i = [a_i, a_{i+1}]$$

$$\hat{x} \longrightarrow x = F_i(\hat{x}) = (a_{i+1} - a_i)\hat{x} + a_i = h_i\hat{x} + a_i \quad \text{con } h_i = a_{i+1} - a_i.$$

Se tiene:

$$\varphi_h^i \circ F_i = \hat{\varphi}_1 \quad \varphi_h^{i+1} \circ F_i = \hat{\varphi}_2$$

Se definen

$$\hat{P} = [\hat{\varphi}_1 \quad \hat{\varphi}_2] \quad \hat{D}\hat{P} = [\hat{\varphi}'_1 \quad \hat{\varphi}'_2].$$

Por la regla de la cadena

$$[DP^{T_i}] = \frac{1}{h_i} [\hat{D}\hat{P}],$$

con lo que el cálculo de matrices y segundos miembros elementales quedaría

$$A_h^{T_i} = \int_{T_i} [DP^{T_i}]^t(x) p(x) [DP^{T_i}](x) dx = \frac{1}{h_i} \int_{\hat{T}} [\hat{D}\hat{P}]^t(\hat{x}) p \circ F_i(\hat{x}) [\hat{D}\hat{P}](\hat{x}) d\hat{x}$$

$$M_h^{T_i} = \int_{T_i} [P^{T_i}]^t(x) q(x) [P^{T_i}](x) dx = h_i \int_{\hat{T}} [\hat{P}]^t(\hat{x}) q \circ F_i(\hat{x}) [\hat{P}](\hat{x}) d\hat{x}$$

$$C_h^{T_i} = \int_{T_i} f(x) [P^{T_i}]^t(x) dx = h_i \int_{\hat{T}} f \circ F_i(\hat{x}) [\hat{P}]^t(\hat{x}) d\hat{x}$$

Así finalmente obtenemos la matriz elemental $[Z_h^{T_i}]$

$$Z_h^{T_i} = A_h^{T_i} + M_h^{T_i}$$

Observación 2.14. Si p y q son constantes la integral se calcula exactamente. Si p y q no son constantes, entonces es necesario usar una fórmula de cuadratura de orden igual al método de discretización. En este caso, las matrices y segundos miembros elementales se calculan con fórmulas de cuadratura exactas en \mathbb{P}_1 , de esta manera se conservan los órdenes de convergencia de los teoremas anteriores (vease [Cia91]). De hecho bastaría utilizar fórmulas de cuadratura exactas en \mathbb{P}_0 .

Cálculo de matrices y segundos miembros elementales con integración numérica

Utilizando las expresiones explícitas de las funciones de base en el elemento de referencia se tiene entonces

$$\begin{aligned}
 A_h^{T_i} &= \frac{1}{h_i} \int_0^1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} p(F_i(\hat{x})) \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} d\hat{x} = \frac{1}{h_i} \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} p(F_i(\hat{x})) d\hat{x} \\
 M_h^{T_i} &= h_i \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-\hat{x} \\ \hat{x} \end{pmatrix} q(F_i(\hat{x})) \begin{pmatrix} 1-\hat{x} & \hat{x} \end{pmatrix} d\hat{x} = h_i \int_0^1 \begin{pmatrix} (1-\hat{x})^2 & (1-\hat{x})\hat{x} \\ \hat{x}(1-\hat{x}) & (\hat{x})^2 \end{pmatrix} q(F_i(\hat{x})) d\hat{x} \\
 C_h^{T_i} &= h_i \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-\hat{x} \\ \hat{x} \end{pmatrix} (f \circ F_i(\hat{x})) d\hat{x}
 \end{aligned}$$

Se ha trabajado con dos fórmulas de cuadratura exactas en \mathbb{P}_1 .

- Aplicando la fórmula de los trapecios ¹ se tiene:

$$\begin{aligned}
 A_h^{T_i} &= \int_0^1 \frac{p(\hat{x})}{h_i} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} d\hat{x} \approx \frac{p(a_i) + p(a_{i+1})}{2h_i} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \\
 M_h^{T_i} &= \int_0^1 q(\hat{x}) h_i \begin{pmatrix} (1-\hat{x})^2 & (1-\hat{x})\hat{x} \\ \hat{x}(1-\hat{x}) & (\hat{x})^2 \end{pmatrix} d\hat{x} \approx \frac{h_i}{2} \begin{pmatrix} q(a_i) & 0 \\ 0 & q(a_{i+1}) \end{pmatrix} \\
 C_h^{T_i} &= h_i \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-\hat{x} \\ \hat{x} \end{pmatrix} (f \circ F_i(\hat{x})) d\hat{x} \approx \frac{h_i}{2} \begin{bmatrix} f(a_i) \\ f(a_{i+1}) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

- Con la formula del punto medio ² resulta:

$$\begin{aligned}
 A_h^{T_i} &\approx \frac{p(\frac{a_i+a_{i+1}}{2})}{h_i} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 M_h^{T_i} &\approx q(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}) h_i \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \\
 C_h^{T_i} &\approx h_i f(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

¹Fórmula del trapecio: $\int_a^b g(t) dt \approx \frac{b-a}{2} [g(a) + g(b)]$

²Fórmula del punto medio: $\int_a^b g(t) dt \approx (b-a) g\left(\frac{a+b}{2}\right)$

2.3.2. Ensamblado de las matrices y segundo miembro globales

Para formalizar el proceso de ensamblado de las matrices y el segundo miembro elementales en la matriz y segundo miembro globales, introducimos la siguiente aplicación lineal

$$[B^{T_i}] : \mathbb{R}^{N+2} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$U_h \longrightarrow B^{T_i} U_h = (U_h^i \ U_h^{i+1})^t$$

con $U_h = (U_h^0, \dots, U_h^{N+1})$, donde $[B^{T_i}]$ es una matriz booleana de orden $2 \times (N+2)$ en nuestro caso:

$$[B^{T_i}] = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ i & i+1 \end{array}$$

Recordemos que

$$\mathbb{A}(u_h, v_h) = a(u_h, v_h) + b(u_h, v_h) = \int_a^b p(x) u'_h(x) v'_h(x) dx + \int_a^b q(x) u(x) v(x) dx \quad (2.9)$$

$$= \sum_{i=0}^N \left[\int_{T_i} p_{|T_i}(x) u'_{h|T_i}(x) v'_{h|T_i}(x) dx + \int_{T_i} q_{|T_i}(x) u_{h|T_i}(x) v_{h|T_i}(x) dx \right] \quad (2.10)$$

Dado que u_h y v_h son funciones afines en cada intervalo se tiene en términos de las matrices elementales

$$\int_{T_i} p_{|T_i}(x) u'_{h|T_i}(x) v'_{h|T_i}(x) dx = \int_{T_i} p_{|T_i}(x) v'_{h|T_i}(x) u'_{h|T_i}(x) dx = (V_h^i, V_h^{i+1}) A_h^{T_i} \begin{pmatrix} U_h^i \\ U_h^{i+1} \end{pmatrix}$$

$$\int_{T_i} q_{|T_i}(x) u_{h|T_i}(x) v_{h|T_i}(x) dx = \int_{T_i} q_{|T_i}(x) v_{h|T_i}(x) u_{h|T_i}(x) dx = (V_h^i, V_h^{i+1}) M_h^{T_i} \begin{pmatrix} U_h^i \\ U_h^{i+1} \end{pmatrix}$$

Por lo que 2.10 quedaría

$$\sum_{i=0}^N (V_h^i, V_h^{i+1}) (A_h^{T_i} + M_h^{T_i}) \begin{pmatrix} U_h^i \\ U_h^{i+1} \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^N (V_h^i, V_h^{i+1}) Z_h^{T_i} \begin{pmatrix} U_h^i \\ U_h^{i+1} \end{pmatrix}.$$

Introduciendo las matrices booleanas definidas al inicio de la sección podemos entonces escribir:

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) &= \sum_{i=0}^N (V_h^i, V_h^{i+1}) A_h^{T_i} \begin{pmatrix} U_h^i \\ U_h^{i+1} \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^N V_h^t [B^{T_i}]^t A_h^{T_i} [B^{T_i}] U_h = \\ &= V_h^t \left[\sum_{i=0}^N [B^{T_i}]^t A_h^{T_i} [B^{T_i}] \right] U_h = V_h^t A_h U_h \end{aligned}$$

donde $A_h = \sum_{i=0}^N [B^{T_i}]^t A_h^{T_i} [B^{T_i}]$ es la matriz de rigidez global. De manera análoga se calcularía $M_h = \sum_{i=0}^N [B^{T_i}]^t M_h^{T_i} [B^{T_i}]$ la matriz de masa global y la matriz del sistema del problema discretizado sería $Z_h = A_h + M_h$.

Procediendo de la misma manera con el segundo miembro

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(v_h) &= \int_a^b f(x) v_h(x) dx = \sum_{i=0}^N \int_{T_i} f(x) v_h(x) dx = \sum_{i=0}^N (V_h^i, V_h^{i+1})^t C_h^{T_i} = \\ &= \sum_{i=0}^N V_h^t [B^{T_i}]^t C_h^{T_i} = V_h^t \left[\sum_{i=0}^N [B^{T_i}]^t C_h^{T_i} \right] = V_h^t C_h \end{aligned}$$

donde $C_h = \sum_{i=0}^N [B^{T_i}]^t C_h^{T_i}$ es el segundo miembro global.

Observación 2.15. En la práctica las matrices B^{T_i} no aparecen en la programación, es suficiente ir actualizando $Z_h \in M_{(N+2) \times (N+2)}$ con los coeficientes de $Z_h^{T_i} \in M_{2 \times 2}$ en las posiciones $(i, i)(i, i+1)(i+1, i)(i+1, i+1)$ de la matriz global y actualizando las componentes del segundo miembro elemental $C_h \in \mathbb{R}^{N+2}$ con $C_h^{T_i}$ en i e $i+1$.

Capítulo 3

Resolución numérica con elementos finitos del problema de segundo orden en dimensión dos

3.1. Formulación variacional. Existencia y unicidad de la solución

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto acotado en \mathbb{R}^2 y con frontera $\partial\Omega$ suficientemente regular (aunque pudiera ser continua a trozos nos restringiremos al caso poligonal) como para garantizar la existencia del vector η (normal unitario) definido a trozos en todo punto de la $\partial\Omega$. Sean $T_0, T_1 \subset \partial\Omega$ tales que $\partial\Omega = T_0 \cup T_1$ con $T_0 \cap T_1 = \emptyset$, se consideran:

$$a_{ij} \text{ definida positiva}, \exists \alpha > 0 \text{ tal que } \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) v_i v_j \geq \alpha \|v\|^2 > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \Omega,$$

$$a_0 \in L^\infty(\Omega), a_0 \geq 0, f \in L^2(\Omega), \quad g \in L^2(T_1), \beta = \hat{u} \text{ en } T_0, (\hat{u} \in H^1(\Omega) \text{ función dada})$$

Consideramos el problema con condición Dirichlet en T_0 y Neumann en T_1 :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a_0 u = f & \text{en } \Omega \\ u = \beta & \text{en } T_0 \quad (\text{Condición Dirichlet}) \\ \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_j = g & \text{en } T_1 \quad (\text{Condición de contorno Neumann}) \end{cases}$$

donde η_j es la j -ésima componente del vector normal unitario exterior a T_1 .

Observación 3.1. Nótese que si $(a_{ij})_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tendríamos que:

$$-\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) = -\Delta u, \quad (3.1)$$

(este será el caso de aplicación en esta memoria). Por lo que se refiere a la condición de contorno se tendría

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \eta_j(x) &= \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \eta_1(x) + \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \eta_2(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1(x) \\ \eta_2(x) \end{pmatrix} = \\ &= \nabla u(x) \cdot \eta(x) = g(x), \end{aligned}$$

esto es, se prescribe la componente normal del gradiente en la frontera T_1 .

En esta memoria solo consideraremos condición Dirichlet sobre u , en consecuencia $T_0 = \partial\Omega$ y $T_1 = \emptyset$. Para el problema de contorno Neumann vease [RT83].

Proposición 3.2. (*Formula de Green [RT83]*) Para todo $u \in H^2(\Omega)$, para todo $v \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right) v - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right) v = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_1} v \eta_1 - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_2} v \eta_2$$

o lo que es lo mismo

$$-\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \eta v \, ds$$

Observación 3.3. Si $v \in H_0^1(\Omega)$ se tiene

$$-\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

donde el último sumando es nulo por la elección de v .

La formulación variacional del problema Dirichlet se escribe entonces:

$$\begin{cases} \text{Determinar } u \in H^1(\Omega), u = \beta \text{ en } \partial\Omega, \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} [\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + a_0 u(x) v(x)] \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (3.2)$$

Definiendo:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(u, v) &= \int_{\Omega} [\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + a_0 u(x) v(x)] \, dx \\ \mathbb{L}(v) &= \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx \end{aligned}$$

se puede expresar el problema variacional anterior como

$$(\mathcal{PV}) \begin{cases} \text{Determinar } u \in H^1(\Omega), u = \beta \text{ en } \partial\Omega, \text{ tal que} \\ \mathbb{A}(u, v) = \mathbb{L}(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Enunciaremos ahora una versión modificada de la proposición 2.5, la demostración es análoga a la ya hecha en el capítulo anterior, con una adaptación del teorema 2.3.

Proposición 3.4. 1) Dada $u \in H^1(\Omega)$ se considera la descomposición $u = \hat{u} + u_0 \in H^1(\Omega)$, con $\hat{u} \in H^1(\Omega)$ tal que $\hat{u} = \beta$, en $\partial\Omega$ y $u_0 = u - \hat{u} \in H_0^1(\Omega)$. El problema variacional (\mathcal{PV}) es equivalente a

$$(\hat{\mathcal{PV}}_0) \begin{cases} \text{Hallar } u_0 \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ \mathbb{A}(u_0, v) = \hat{\mathbb{L}}(v) = \mathbb{L}(v) - \mathbb{A}(\hat{u}, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

2) El problema variacional (\mathcal{PV}) tiene solución única.

3.2. Problema discretizado y formulación matricial

Sea T_h una triangulación de Ω , $\Omega = \cup_{T \in T_h} T$. Se considerarán triangulaciones válidas si

$$T_i \cap T_j = \begin{cases} \emptyset \\ \text{vértice común} \\ \text{arista común.} \end{cases} \quad (3.3)$$

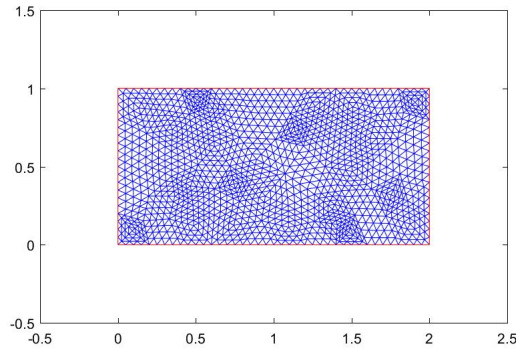


Figura 3.1: Triangulación hecha con pdetool que consta de 1405 triángulos

Definimos el espacio de los elementos finitos X_h como:

$$X_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\Omega) : v_h|_T \in \mathbb{P}_1, \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

donde \mathbb{P}_1 representa el espacio de funciones polinómicas de grado uno en dos variables $< 1, x, y >$, y el espacio de las funciones test:

$$V_{h0} = \{v_h \in X_h : v_h = 0 \text{ en } \partial\Omega\}.$$

Siguiendo [VF] se denota por β_h una aproximación de β en $\partial\Omega$, entonces el problema aproximado se escribe

$$(\mathcal{PV}_h) \begin{cases} \text{Determinar } u_h \in X_h, u_h = \beta_h \text{ en } \partial\Omega, \text{ tal que} \\ \mathbb{A}(u_h, v_h) = \mathbb{L}(v_h) \quad \forall v_h \in V_{h0}. \end{cases}$$

Observación 3.5. Nótese que en el caso homogéneo $\beta = \beta_h = 0$, el problema sería determinar $u_h \in V_{h0}$.

Sea Σ_h el conjunto de nodos de la triangulación y Σ_T los tres vértices del triángulo T de la triangulación. (Nótese que el conjunto de los vértices de los triángulos serán los nodos de la triangulación).

$$\Sigma_h = \cup_{T \in \mathcal{T}_h} \Sigma_T = \{a_i : 1 \leq i \leq N\}.$$

Definimos además $\Sigma_\partial = \Sigma_h \cap \partial\Omega$ y $\Sigma_0 = \Sigma_h - \Sigma_\partial$ de manera que la dimensión de V_{h0} es $\text{card}(\Sigma_0) = N - M, \text{card}(\Sigma_h) = N$.

Se considera una numeración de manera que a_1, \dots, a_M son los nodos interiores de Ω y a_{M+1}, \dots, a_N los nodos de $\partial\Omega$.

Dado que toda v_h de X_h está determinada de forma unívoca por sus valores en los nodos de la triangulación $v_h(a_1), \dots, v_h(a_N)$ entonces la dimensión de X_h es N .

Se pueden tomar las funciones de la base de X_h tales que: $\varphi_h^i \in X_h, \varphi_h^i(a_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq N$

Así toda función v_h de X_h se escribe de forma única como:

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^N v_h(a_i) \varphi_h^i(x),$$

y toda función de V_{h0} se escribe de forma única como

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^M v_h(a_i) \varphi_h^i(x).$$

Introduciendo las combinaciones lineales anteriores en (\mathcal{PV}_h) el problema discretizado puede expresarse como

$$(\mathcal{PV}_h) \left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } u_h \in X_h, u_h = \beta_h \text{ en } \partial\Omega, \text{ tal que} \\ \mathbb{A}(\sum_{i=1}^N u_h(a_i)\varphi_h^i, \sum_{i=1}^M v_h(a_i)\varphi_h^i) = \mathbb{L}(\sum_{j=1}^M v_h(a_j)\varphi_h^j) \quad v_h \in V_h. \end{array} \right.$$

Gracias a la bilinealidad de \mathbb{A} y a la linealidad de \mathbb{L} , nótese que

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(\sum_{i=1}^N u_h(a_i)\varphi_h^i, \sum_{i=1}^M v_h(a_i)\varphi_h^i) &= \sum_{i=1}^M v_h(a_i)\mathbb{A}(\sum_{j=1}^N u_h(a_j)\varphi_h^j, \varphi_h^i) = \mathbb{L}(\sum_{i=1}^M v_h(a_i)\varphi_h^i) = \\ &= \sum_{i=1}^M v_h(a_i)\mathbb{L}(\varphi_h^i). \end{aligned}$$

por lo que es suficiente considerar la igualdad en los elementos de la base de V_{h0}

$$\mathbb{A}(\sum_{j=1}^N u_h(a_j)\varphi_h^j, \varphi_h^i) = \mathbb{L}(\varphi_h^i) \quad \text{con } i = 1, \dots, M.$$

Por ello finalmente el problema variacional discretizado se expresa como

$$(\mathcal{P}\hat{\mathcal{V}}_h) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u_h = \sum_{i=1}^N U_h^i \varphi_h^i, \quad U_h^j = \beta_h(a_j) \quad j = M+1, \dots, N \\ \text{tal que } \mathbb{A}(u_h, \varphi_h^i) = \mathbb{L}(\varphi_h^i) \quad i = 1, \dots, M \end{array} \right.$$

siendo $U_h^i = u_h(a^i), i = 1, \dots, N$.

3.2.1. Bloqueo de los grados de libertad asociados a la frontera

Caso homogéneo

Se considera la numeración de la sección anterior de manera que a_1, \dots, a_M son los nodos interiores de Ω y a_{M+1}, \dots, a_N los nodos de $\partial\Omega$. Definiendo los conjuntos de índices $I = \{1, 2, \dots, M\}$ e $II = \{M+1, \dots, N\}$, sean

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} u_h(a_1) \\ \vdots \\ u_h(a_N) \end{pmatrix} \quad \hat{V} = \begin{pmatrix} v_h(a_1) \\ \vdots \\ v_h(a_N) \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} L(\varphi_h^1) \\ \vdots \\ L(\varphi_h^N) \end{pmatrix} \quad \hat{U}, \hat{V}, b \in \mathbb{R}^N,$$

$$A = (a_{ij}) = \mathbb{A}(u_j, u_i) \in M_{N \times N}$$

Teniendo en cuenta que $v_h \in V_{h0} \Leftrightarrow \hat{V} \in \mathbb{R}^N$ tal que $\hat{V}_{M+1} = \hat{V}_{M+2} = \dots = \hat{V}_N = 0$, esto es

$$v_h \in V_{h0} \Leftrightarrow \hat{V} = \begin{pmatrix} \hat{V}_I \\ \hat{V}_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{V}_I \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{V}_I \in \mathbb{R}^M.$$

El problema aproximado es equivalente a:

$$\begin{cases} \text{Determinar } \hat{U} \in \mathbb{R}^N \text{ tal que :} \\ u_{\hat{M}+1} = \dots = u_N = 0 \\ \hat{V}^t A \hat{U} = \hat{V}^t b, \end{cases}$$

o realizando la descomposición

$$b = \begin{pmatrix} b_I \\ b_{II} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} A_{I,I} & A_{I,II} \\ A_{II,I} & A_{II,II} \end{pmatrix}$$

$$(\mathcal{PV}_h^*) \begin{cases} \text{Determinar } \hat{U}_I \in \mathbb{R}^M \text{ tal que :} \\ \begin{pmatrix} \hat{V}_I \\ 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} A_{I,I} & A_{I,II} \\ A_{II,I} & A_{II,II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U}_I \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{V}_I \\ 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} b_I \\ b_{II} \end{pmatrix} \quad \forall \hat{V}_I \in \mathbb{R}^M, \end{cases}$$

lo que se reduce a resolver el sistema lineal de orden M :

$$\mathcal{PV}_h^{**} \begin{cases} \text{Determinar } \hat{U}_i \in \mathbb{R}^M \text{ tal que :} \\ A_{I,I} \hat{U}_I = b_I. \end{cases}$$

Caso no homogéneo

Usando las notaciones definidas anteriormente, el problema general no homogéneo es

$$(\mathcal{PV}_h) \begin{cases} \text{Determinar } \hat{U} \in \mathbb{R}^N \text{ tal que } \hat{U}_{M+1} = \hat{B}_1, \dots, \hat{U}_N = \hat{B}_{N-M} \\ \hat{V}^t A \hat{U} = \hat{V}^t b, \quad \forall \hat{V} \in \mathbb{R}^N \text{ con } \hat{V}_{M+1} = \dots = \hat{V}_N = 0 \end{cases}$$

donde \hat{B}_j representa el valor fijado para u en el nodo a_{j+M} ($\hat{B}_j = \beta_h(a_{j+M})$), $j = 1, \dots, N-M$

Considerando la descomposición por bloques.

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \hat{U}_I \\ \hat{U}_{II} \end{pmatrix} \quad \hat{V} = \begin{pmatrix} \hat{V}_I \\ \hat{V}_{II} \end{pmatrix} \quad \hat{U}, \hat{V} \in \mathbb{R}^N,$$

el problema variacional discretizado es equivalente a:

$$(\mathcal{PV}_h^*) \begin{cases} \text{Determinar } \hat{U} \in \mathbb{R}^N \text{ tal que } \hat{U}_{II} = \hat{B} \in \mathbb{R}^{N-M} \text{ verificando} \\ \begin{pmatrix} \hat{V}_I \\ 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} A_{I,I} & A_{I,II} \\ A_{II,I} & A_{II,II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U}_I \\ \hat{U}_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{V}_I \\ 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} b_I \\ b_{II} \end{pmatrix} \quad \forall \hat{V}_I \in \mathbb{R}^M \end{cases}$$

el cual es equivalente al siguiente sistema lineal de orden M :

$$(\mathcal{PV}_h^{**}) \quad A_{I,I} \hat{U}_I = b_I - A_{I,II} \hat{U}_{II} = b_I - A_{I,II} \hat{B} = \hat{b}_I.$$

En el ordenador se prefiere conservar el sistema de dimensión N así que se resuelve

$$\begin{pmatrix} A_{I,I} & 0_{M \times (N-M)} \\ 0_{(N-M) \times M} & I_{N-M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U}_I \\ \hat{U}_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_I \\ B \end{pmatrix}.$$

A esta manera de proceder se la conoce como bloqueo de los grados de libertad.

3.2.2. Resultados de convergencia

En este epígrafe se enuncian resultados de convergencia del método de elementos finitos afines a trozos en un dominio poligonal de \mathbb{R}^2 . Consideraremos familias de triangulaciones $\{T_h\}_{h>0}$ que cumplen las dos siguientes condiciones geométricas:

(H1): $h = \max\{\text{diam}(T), T \in T_h\} \rightarrow 0$ donde $\text{diam}(T)$ es el diámetro de T .

(H2): existe un ángulo $\theta_0 > 0$ tal que para todo h , para todo $T \in T_h$,

$$\theta_T = \min\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\} \geq \theta_0.$$

La segunda hipótesis garantiza que para todos los triángulos de todas las triangulaciones de la familia el mínimo de los ángulos interiores está uniformemente acotado en h .

El siguiente resultado es un caso particular del teorema 5.1-4 de [RT83].

Teorema 3.6. *Sea $u \in H^1(\Omega)$ la solución del problema 3.2. Sea $u_h \in X_h$ la solución obtenida con el método de elementos finitos con funciones de base afines a trozos. Entonces el método es convergente, esto es*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{1,\Omega} = 0.$$

Además si $u \in H^2(\Omega)$ existe una constante C_1 , independiente de h tal que, entonces

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C_1 h |u|_{2,\Omega}.$$

Pueden obtenerse también estimaciones de error en norma $L^2(\Omega)$.

Teorema 3.7. *En las hipótesis del teorema anterior si el abierto Ω es convexo y $u \in H^2(\Omega)$ entonces existe una constante C_2 independiente de h tal que*

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq C_2 h^2 |u|_{2,\Omega}.$$

En el caso de que las integrales se calculen de forma aproximada con fórmulas de cuadratura numérica (como detallaremos en la sección siguiente), el esquema discretizado así construido también es convergente, bajo condiciones adicionales de regularidad sobre f . En particular ([Cia91]) prueba que para elementos finitos afines a trozos sobre triángulos $\|u - u_h\|_{1,\Omega} = \mathcal{O}(h)$ considerando esquemas de cuadratura exactos en \mathbb{P}_0 .

3.3. Implementación

Como en el caso 1-D, el cálculo se realizará elemento a elemento y la matriz de coeficientes del sistema, así como el segundo miembro, será el resultado acumulado de todos los elementos de la malla.

3.3.1. Cálculo de las matrices y segundos miembros elementales

Sea $T \in T_h$ un elemento arbitrario de la triangulación y sea $\Sigma_T = \{a_1^T, a_2^T, a_3^T\}$ el conjunto de nodos de T en orientación antihoraria (si tenemos orientaciones distintas en los elementos el sistema podría estar mal construido) y p_i^T con $i = 1, 2, 3$ es la restricción al triángulo T de las funciones de base definidas en la sección anterior asociadas a los vértices del triángulo, con $p_i^T(a_j^T) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq 3$. Definimos

$$[P^T] = [p_1^T, p_2^T, p_3^T], \quad [DP^T] = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1^T}{\partial x_1} & \frac{\partial p_2^T}{\partial x_1} & \frac{\partial p_3^T}{\partial x_1} \\ \frac{\partial p_1^T}{\partial x_2} & \frac{\partial p_2^T}{\partial x_2} & \frac{\partial p_3^T}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Sea $v_h \in X_h$ arbitrario, como $v_h|_T$ es una función afín en el triángulo, tenemos por definición

$$v_h|_T = \sum_{r=1}^3 v_h(a_r^T) p_r^T = [P^T] V_T$$

donde $V_T \in \mathbb{R}^3 = \begin{pmatrix} v_h(a_1^T) \\ v_h(a_2^T) \\ v_h(a_3^T) \end{pmatrix}$ es el vector de grados de libertad locales y $[P^T] =$

$[p_1^T \ p_2^T \ p_3^T]$, $P_T \in M_{1 \times 3}$, la matriz de funciones de base locales. Así

$$\nabla v|_T = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_h}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_h}{\partial x_2} \end{pmatrix} \Big|_T = \begin{pmatrix} \sum_{r=1}^3 v_h(a_r^T) \frac{\partial p_r^T}{\partial x_1} \\ \sum_{r=1}^3 v_h(a_r^T) \frac{\partial p_r^T}{\partial x_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1^T}{\partial x_1} & \frac{\partial p_2^T}{\partial x_1} & \frac{\partial p_3^T}{\partial x_1} \\ \frac{\partial p_1^T}{\partial x_n} & \frac{\partial p_2^T}{\partial x_n} & \frac{\partial p_3^T}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_h(a_1^T) \\ v_h(a_2^T) \\ v_h(a_3^T) \end{pmatrix} = [DP^T]V_T.$$

Se detalla a continuación el cálculo de las matrices y segundos miembros elementales utilizando un cambio de variable al elemento de referencia \hat{T} . Se tiene que existe una única aplicación $F_T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, afín invertible que transforma el triángulo de referencia en T , esto es

$$F_T(\hat{x}) = B_T x + c_T, \quad \text{donde } B_T \in M_{2 \times 2} \text{ es invertible y } c_T \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que}$$

$$T = F_T(\hat{T})$$

$$P_T = \{p_i = \hat{p}_i \circ F_T^{-1}, i = 1, 2, 3\},$$

$$a_i^T = F_T(\hat{a}_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Observación 3.8. En esta memoria utilizaremos elementos finitos afines definidos en un triángulo de tres nodos en los vértices, pero podrían considerarse elementos finitos de mayor grado construidos sobre triángulos con nodos en puntos medios de aristas o bien sobre otras figuras geométricas como rectángulos (vease [RT83])

$$\text{Sea } F_T(\hat{a}_i) = a_i, \quad 1 \leq i \leq 3 \implies B_T = (a_1 - a_3 | a_2 - a_3), c_T = a_3$$

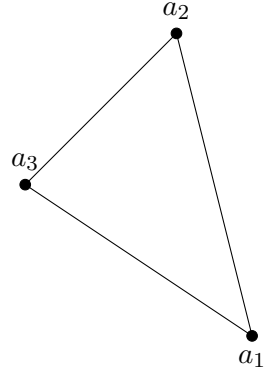
$$\hat{a}_2 = (0, 1)$$

$$\hat{a}_3 = (0, 0)$$

$$\hat{a}_1 = (1, 0)$$

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 &= \hat{x} \\ \hat{p}_2 &= \hat{y} \\ \hat{p}_3 &= 1 - \hat{x} - \hat{y} \end{aligned}$$

$$F_T$$



Observación 3.9. Las funciones afines

$$\hat{p}_1(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}, \quad \hat{p}_2(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{y}, \quad \hat{p}_3(\hat{x}, \hat{y}) = 1 - \hat{x} - \hat{y}$$

forman una base en \hat{T} de \mathbb{P}_1 .

Con las notaciones

$$[\hat{P}] = [\hat{p}_1 \quad \hat{p}_2 \quad \hat{p}_3], \quad [D\hat{P}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \hat{p}_3}{\partial \hat{x}_1} \\ \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial \hat{p}_3}{\partial \hat{x}_2} \end{pmatrix} = (\hat{\nabla} \hat{p}_1, \hat{\nabla} \hat{p}_2, \hat{\nabla} \hat{p}_3)$$

se tiene para las funciones estas relaciones:

$$\hat{p}_j(\hat{x}) = (p_j^T \circ F_T)(\hat{x}) = p_j^T(x), j = 1, 2, 3 \quad x = F_T(\hat{x}),$$

es decir

$$[P^T](x) = [P^T] \circ F_T(\hat{x}) = [\hat{P}](\hat{x}).$$

Por otro lado, puesto que los gradientes están dispuestos en columna, para todo $V \in \mathbb{R}^2$ se tiene

$$\begin{aligned} V^t \hat{\nabla} \hat{p}_j(\hat{x}) &= D\hat{p}_j(\hat{x})(V) = D(p_j^T \circ F_T)(\hat{x})(V) = \\ &= Dp_j^T(x)(DF_T(\hat{x})(V)) = Dp_j^T(x)(B_TV) = V^t B_T^t \nabla p_j^T(x) \end{aligned}$$

por lo que

$$[DP^T](x) = (B_T^t)^{-1}[\hat{D}\hat{P}](\hat{x}) \quad (3.4)$$

aplicando la regla de la cadena y teniendo en cuenta que F_T es una función afín cuya parte lineal es el producto por la matriz B_T .

Así podemos expresar las integrales sobre T

$$\int_T \psi \, dx = \int_{\hat{T}} (\psi \circ F_T)(\hat{x}) |det \, DF_T(\hat{x})| \, d\hat{x} = |det \, B_T| \int_{\hat{T}} (\psi \circ F_T)(\hat{x}) \, d\hat{x}.$$

Aplicándolo a los tres casos:

- Para la matriz de rigidez (véase 3.4)

$$[A^T] = \int_T [DP^T]^t(x) [DP^T](x) \, dx = |det \, B_T| \int_{\hat{T}} [\hat{D}\hat{P}]^t(\hat{x}) B_T^{-1} B_T^{-t} [\hat{D}\hat{P}](\hat{x}) \, d\hat{x}.$$

- Para la matriz de masa

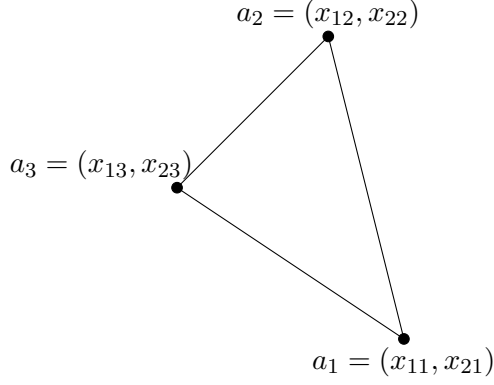
$$\begin{aligned} [M^T] &= \int_T [P^T](x) a_0(x) [P^T](x) \, dx = \int_{\hat{T}} [P^T]^t \circ F_T(\hat{x}) (a_0 \circ F_T)(\hat{x}) [P^T] \circ F_T(\hat{x}) |det \, B_T| \, d\hat{x} = \\ &= |det \, B_T| \int_{\hat{T}} [\hat{P}]^t(\hat{x}) (a_0 \circ F_T)(\hat{x}) [\hat{P}](\hat{x}) \, d\hat{x}. \end{aligned}$$

- Para el vector segundo miembro

$$[b^T] = \int_T [P^T]^t(x) f(x) \, dx = |det \, B_T| \int_{\hat{T}} [\hat{P}]^t(\hat{x}) (f \circ F_T)(\hat{x}) \, d\hat{x}.$$

El cálculo de la matriz de rigidez se puede realizar de manera exacta en nuestro caso ya que los gradientes de las funciones de base son constantes sobre cada triángulo. Para la

matriz de masa y el segundo miembro usaremos la fórmula de los puntos medios ¹, aunque sería suficiente utilizar una fórmula exacta en polinomios de grado cero como la fórmula de los vértices ² o fórmula del baricentro ³.



Sea T un triángulo con vertices $a_i = (x_{1i}, x_{2i})^t$, $1 \leq i \leq 3$. Conforme vimos se tiene

$$B_T = (a_1 - a_3 | a_2 - a_3) = \begin{pmatrix} x_{11} - x_{13} & x_{12} - x_{13} \\ x_{21} - x_{23} & x_{22} - x_{23} \end{pmatrix} \quad C_T = a_3 = \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \end{pmatrix}$$

Sea $S_T = \det B_T = 2 \text{Area}(T)$ entonces

$$B_T^{-1} = \frac{1}{S_T} \begin{pmatrix} x_{22} - x_{23} & x_{13} - x_{12} \\ x_{23} - x_{21} & x_{11} - x_{13} \end{pmatrix}.$$

De $[\hat{P}(\hat{x})] = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, 1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2]$, se sigue $[\hat{D}\hat{P}(\hat{x})] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ resultando

$$B_T^{-1}[\hat{D}\hat{P}] = \frac{1}{S_T} \begin{pmatrix} x_{22} - x_{23} & x_{23} - x_{21} & x_{21} - x_{22} \\ x_{13} - x_{12} & x_{11} - x_{13} & x_{12} - x_{11} \end{pmatrix}.$$

Matriz de rigidez elemental

$$[A^T] = |\det B_T| \int_{\hat{T}} [\hat{D}\hat{P}]^t(\hat{x}) B_T^{-1} B_T^{-t} [\hat{D}\hat{P}](\hat{x}) d\hat{x} = \frac{1}{2S_T} G^t G.$$

¹Fórmula de los puntos medios: $\int_{\hat{T}} \hat{\psi}(\hat{x}) d\hat{x} = \frac{1}{3} \text{Area}(\hat{T}) \sum_{i=1}^3 \hat{\psi}(\hat{b}_i)$ donde los nodos de cuadratura $\hat{b}_i, 1 \leq i \leq 3$, son los puntos medios del lado opuesto al vértice i caracterizados por ser la semisuma de los vértices de la arista

$$b_1 = \frac{a_2 + a_3}{2}, b_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}, b_3 = \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

²Fórmula de los vértices: $\int_{\hat{T}} \hat{\psi}(\hat{x}) d\hat{x} = \frac{1}{3} \text{Area}(\hat{T}) \sum_{i=1}^3 \hat{\psi}(\hat{a}_i)$.

³Fórmula del baricentro: $\int_{\hat{T}} \hat{\psi}(\hat{x}) d\hat{x} = \text{Area}(\hat{T}) \hat{\psi}(\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \hat{a}_i)$.

tomando

$$G = \begin{pmatrix} x_{22} - x_{23} & x_{23} - x_{21} & x_{21} - x_{22} \\ x_{13} - x_{12} & x_{11} - x_{13} & x_{12} - x_{11} \end{pmatrix}$$

y teniendo en cuenta que $Area(\hat{T}) = 1/2$.

Matriz de masa elemental

Sea $\hat{a}_0(\hat{x}, \hat{y}) = a_0 \circ F_T(\hat{x}, \hat{y})$

$$\begin{aligned} [M^T] &= |det B_T| \int_{\hat{T}} [\hat{P}]^t(\hat{x})(a_0 \circ F_T)(\hat{x})[\hat{P}](\hat{x}) d\hat{x} = \\ &= \frac{2(Area(\hat{T}))^2}{24} \begin{pmatrix} \hat{a}_0(1/2, 0) + \hat{a}_0(1/2, 1/2) & \hat{a}_0(1/2, 1/2) & \hat{a}_0(1/2, 0) \\ \hat{a}_0(1/2, 1/2) & \hat{a}_0(1/2, 1/2) + \hat{a}_0(0, 1/2) & \hat{a}_0(0, 1/2) \\ \hat{a}_0(1/2, 0) & \hat{a}_0(0, 1/2) & \hat{a}_0(1/2, 0) + \hat{a}_0(0, 1/2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Segundo miembro elemental

Sea $\hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) = f \circ F_T(\hat{x}, \hat{y})$

$$[b^T] = |det B_T| \int_{\hat{T}} [\hat{P}]^t(\hat{x})(f \circ F_T)(\hat{x}) d\hat{x} = \frac{Area(\hat{T})}{6} \begin{pmatrix} \hat{f}(1/2, 0) + \hat{f}(1/2, 1/2) \\ \hat{f}(1/2, 1/2) + \hat{f}(0, 1/2) \\ \hat{f}(1/2, 0) + \hat{f}(0, 1/2) \end{pmatrix}$$

3.3.2. Ensamblado de las matrices y segundo miembro globales

Teniendo en cuenta la aditividad de la integral respecto del dominio de integración y que $\Omega = \cup_{T \in T_h} T$, el problema (\mathcal{PV}_h) se escribe

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } u_h \in X_h, \text{ tal que } u_h = \beta_h \text{ en } \partial\Omega, \text{ verificando} \\ \sum_{T \in T_h} \left[\int_T \left(\frac{\partial v_h}{\partial x_1} \frac{\partial v_h}{\partial x_2} \right) |_T \left(\frac{\partial u_h}{\partial x_1} \right) |_T dx + \int_T v_h |_T a_0 |_T u_h |_T dx \right] = \\ = \sum_{T \in T_h} \left[\int_T f |_T v_h |_T dx \right] \quad \forall v_h \in V_h. \end{array} \right.$$

Sustituyendo las funciones por sus expresiones en términos de la base local de cada

triángulo se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } u_h \in X_h \text{ tal que } u_h = \beta_h \text{ en } \partial\Omega, \text{ verificando} \\ \sum_{T \in T_h} \int_T V_T^t [DP^T]^t [DP^T] V_T dx + \sum_{T \in T_h} \int_T V_T^t [P^T]^t a_0^T [P^T] U_T dx = \\ = \sum_{T \in T_h} \int_T V_T^t [P^T]^t f^T dx \quad \forall v_h \in V_h, \end{array} \right.$$

donde

$$a_0^T = a_{0|T}, \quad f^T = f|_T, \quad U_T = (u_h(a_1^T), u_h(a_2^T), u_h(a_3^T))^t, \quad V_T = (v_h(a_1^T), v_h(a_2^T), v_h(a_3^T))^t.$$

Se pueden obtener los grados de libertad locales del elemento T en función de los grados de libertad globales:

$$\hat{V}_h = \begin{pmatrix} v_h(a_1) \\ \vdots \\ v_h(a_N) \end{pmatrix}, \quad \hat{U}_h = \begin{pmatrix} u_h(a_1) \\ \vdots \\ u_h(a_N) \end{pmatrix}, \quad \hat{U}_h, \hat{V}_h \in \mathbb{R}^N, \quad u_h, v_h \in X_h,$$

mediante unas matrices booleanas, teniendo en cuenta que para el elemento T de nodos a_1^T, a_2^T, a_3^T se tiene $a_\alpha^T = a_{n_\alpha^T}$, $1 \leq \alpha \leq 3$, siendo $1 \leq n_\alpha^T \leq N$ los nodos del triángulo en la numeración global. Entonces existe una matriz $B^T \in M_{3 \times N}$,

$$\text{dada por } [B^T] = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ & & & n_2^T & n_3^T & & n_1^T \end{array}$$

tal que $[B^T]\hat{V} = V_T$ pues

$$[B^T]\hat{V} = [B^T] \begin{pmatrix} v_h(a_1) \\ \vdots \\ v_h(a_N) \end{pmatrix} = V_T = \begin{pmatrix} v_h(a_1^T) \\ v_h(a_2^T) \\ v_h(a_3^T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_h(a_{n_1^T}) \\ v_h(a_{n_2^T}) \\ v_h(a_{n_3^T}) \end{pmatrix}.$$

Por tanto retomando la formulación variacional podemos reescribir el problema como

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } \hat{U} \in \mathbb{R}^N \text{ tal que } \hat{U}_i = \beta_i, \quad i = M+1, \dots, N \text{ verificando} \\ \sum_{T \in T_h} \int_T \hat{V}^t [B^T]^t [DP^T]^t [DP^T] [B^T] \hat{U} dx + \sum_{T \in T_h} \int_T \hat{V}^t [B^T]^t [P^T]^t a_0^T [P^T] [B^T] \hat{U} dx = \\ = \sum_{T \in T_h} \int_T \hat{V}^t [B^T]^t [P^T]^t f^T dx \quad \forall \hat{V}, \text{ con } \hat{V} = (v_h(a_1), \dots, v_h(a_M), 0, \dots, 0)^t \end{array} \right.$$

Dado que la aplicación que establece la correspondencia de $v_h \in V_{h0}$ con $\hat{V} \in \mathbb{R}^N$ con $\hat{V}_i = 0, M+1 \leq i \leq N$ es un isomorfismo, (\mathcal{PV}_h) es equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } \hat{U} \in \mathbb{R}^N \text{ tal que } \hat{U}_i = \beta_i, i = M+1, \dots, N \text{ verificando} \\ \hat{V}^t \left\{ \sum_{T \in T_h} [B^T]^t \left(\int_T [DP^T]^t [DP^T] dx \right) [B^T] \right\} \hat{U} + \hat{V}^t \left\{ \sum_{T \in T_h} [B^T]^t \left(\int_T [P^T]^t a_0^T [P^T] dx \right) [B^T] \right\} \hat{U} = \\ = \hat{V}^t \left(\sum_{T \in T_h} [B^T]^t \int_T [P^T]^t f^T dx \right) \quad \forall \hat{V} \in \mathbb{R}^N, \hat{V}_i = 0, i = M+1, \dots, N, \end{array} \right.$$

donde

$$\begin{aligned} \int_T [DP^T]^t [DP^T] dx &= [A^T] \quad \text{es la matriz de rigidez elemental,} \\ \int_T [P^T]^t a_0^T [P^T] dx &= [M^T] \quad \text{es la matriz de masa elemental,} \\ \int_T [P^T]^t f^T dx &= b^T \quad \text{es el segundo miembro elemental.} \end{aligned}$$

El problema variacional discretizado se escribe entonces :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } \hat{U} \in \mathbb{R}^N \text{ tal que } \hat{U}_i = \beta_i, i = M+1, \dots, N \text{ verificando} \\ \hat{V}^t \left\{ \sum_{T \in T_h} [B^T]^t [A^T + M^T] [B^T] \right\} \hat{U} = \hat{V}^t \left\{ \sum_{T \in T_h} [B^T]^t b^T \right\} \\ \forall \hat{V} \in \mathbb{R}^N, \hat{V}_i = 0, i = M+1, \dots, N \end{array} \right.$$

Si ahora denotamos

$$\begin{aligned} A &= \sum_{T \in T_h} [B^T]^t [A^T] [B^T] = \text{matriz global de rigidez} \\ M &= \sum_{T \in T_h} [B^T]^t [M^T] [B^T] = \text{matriz global de masa} \\ b &= \sum_{T \in T_h} [B^T]^t b^T = \text{segundo miembro global,} \end{aligned}$$

el problema anterior se puede reescribir como

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } \hat{U} \in \mathbb{R}^N \text{ tal que } \hat{U}_i = \beta_i, i = M+1, \dots, N \text{ verificando} \\ \hat{V}^t Z \hat{U} = \hat{V}^t b \quad \forall \hat{V} \in \mathbb{R}^N \quad \hat{V}_i = 0, i = M+1, \dots, N, \end{array} \right.$$

donde la matriz Z es la suma de las matrices de masa y de rigidez

$$Z = A + M = \sum_{T \in T_h} [B^T]^t [Z^T] [B^T], \quad \text{con } [Z^T] = [A^T] + [M^T].$$

Ensamblado de la matriz y del segundo miembro

Se ha visto en la sección anterior que $Z = \sum_{T \in T_h} [B^T]^t [Z^T] [B^T]$ siendo Z^T la matriz de elemental y T el elemento de triangulación con vértices $a_i^T = a_{n_i^T}$, $1 \leq i \leq 3$. Entonces $[B^T]_{ij} = \delta_{jn_i^T}$, $1 \leq j \leq N$ y $1 \leq i \leq 3$. Así la contribución del elemento T al coeficiente i, j -ésimo de la matriz global Z con $1 \leq i, j \leq N$ sería

$$\begin{aligned} ([B^T]^t [Z^T] [B^T])_{ij} &= \sum_{k=1}^3 ([B^T]^t [Z^T])_{ik} [B^T]_{kj} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 [B^T]_{il}^t [Z^T]_{lk} [B^T]_{kj} = \\ &= \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 [Z^T]_{lk} [B^T]_{li} [B^T]_{kj} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 [Z^T]_{lk} \delta_{in_l^T} \delta_{jn_k^T} \quad \text{esto es} \end{aligned}$$

$$([B^T]^t [Z^T] [B^T])_{ij} = \begin{cases} [Z^T]_{\alpha\beta} & \text{si } i = n_\alpha^T, j = n_\beta^T \text{ para algun } \alpha, \beta \in \{1, 2, 3\} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Así los únicos elementos de la matriz Z que cambian debido a la contribución de este triángulo son $Z_{n_\alpha^T n_\beta^T}$, $1 \leq \alpha, \beta \leq 3$ que se modifican añadiéndoles $[Z^T]_{\alpha\beta}$.

Observación 3.10. Como las matrices de masa y rigidez elementales son simétricas la matriz global también es simétrica y es suficiente calcular su parte triangular superior o su parte triangular inferior.

Observación 3.11. Completado el ensamblado habrá coeficientes nulos en la posición (i, j) de la matriz si no existe ningún triángulo en el que coincidan los vértices i, j .

Con un procedimiento análogo se realiza el ensamblado del vector segundo miembro. Como vimos $b = \sum_{T \in T_h} [B^T]^t b^T$ donde $b^T \in \mathbb{R}^3$. Si T es un elemento de la triangulación con vertices $a_i^T = a_{n_i^T}$, $1 \leq i \leq 3$, entonces la contribución del elemento T para el vector global b se realizaría en las componentes $n_i^T, i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} ([B^T]^t b^T)_j &= \sum_{k=1}^3 [B^T]_{jk}^t b_k^T = \sum_{k=1}^3 [B^T]_{kj} b_k^T = \\ &= \sum_{k=1}^3 \delta_{jn_k^T} b_k^T = \begin{cases} b_\alpha^T & \text{si } j = n_\alpha^T \text{ para algun } \alpha \in \{1, 2, 3\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

Los únicos elementos del vector b que se alteran con estos elementos son $b_{n_\alpha^T}$, $1 \leq \alpha \leq 3$ que se modifica añadiéndole b_α^T .

Capítulo 4

Problemas de cuarto orden

En este capítulo se introducen los problemas de cuarto orden en forma diferencial y se construyen las formulaciones variacionales mixtas en 1D y 2D correspondientes, que serán discretizadas con el MEF.

4.1. Problema cuarto orden monodimensional

En esta sección a partir de la forma diferencial se obtiene una formulación mixta del problema lineal de cuarto orden, que reduce el problema a dos ecuaciones diferenciales de segundo orden de las que se construirá una formulación variacional con vistas a la resolución numérica mediante elementos finitos.

Sea f una función continua en un intervalo (a, b) y $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Se considera el problema:

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} u'''' = f & \text{en } (a, b) \\ -u''(a) = \alpha_1, -u''(b) = \beta_1, \\ u(a) = \alpha_2, u(b) = \beta_2 \end{cases}$$

Introduciendo la variable auxiliar $p = -u''$ el problema (\mathcal{P}) se escribiría:

$$(\hat{\mathcal{P}}) \begin{cases} -p'' = f & \text{en } (a, b) \\ p(a) = \alpha_1, p(b) = \beta_1, \\ -u'' = p & \text{en } (a, b) \\ u(a) = \alpha_2, u(b) = \beta_2, \end{cases}$$

donde se ha transformado el problema de cuarto orden en la resolución de dos problemas de segundo orden. A esta nueva manera de escribir el problema se le llamará formulación diferencial mixta. Para resolverlo numericamente con el MEF debe construirse una formulación variacional del problema mixto.

Formulación variacional del problema mixto

De manera análoga a como se ha hecho en el capítulo 2 consideramos las siguientes formas bilineales

$$a : H^1(a, b) \times H^1(a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{con} \quad a(u, v) = \int_a^b u'v'.$$

$$b : L^2(a, b) \times L^2(a, b) \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ con} \quad b(u, v) = \int_a^b uv.$$

Retomando la formulación variacional para el operador lineal autoadjunto de segundo orden monodimensional con $p(x) = 1$ se tiene que el problema $(\hat{\mathcal{P}})$ se reformula variacionalmente como

$$(\mathcal{PV}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } p \in H^1(a, b), p(a) = \alpha_1, p(b) = \beta_1, \\ \text{hallar } u \in H^1(a, b), u(a) = \alpha_2, u(b) = \beta_2 \quad \text{tales que} \\ a(p, v) = b(f, v) \quad \forall v \in H_0^1(a, b) \quad y \\ a(u, v) = b(p, v) \quad \forall v \in H_0^1(a, b) \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Esta es la formulación variacional mixta del problema continuo. En [VF] se construye una formulación variacional del problema (\mathcal{P}) en la que intervienen derivadas de orden dos, mientras que en (\mathcal{PV}) solo aparecen derivadas de primer orden. Esto tambien va a tener consecuencias en el proceso de discretización que describimos a continuación.

Problema discretizado

Se consideran los espacios de elementos finitos de funciones afines a trozos introducidos en el capítulo 2, X_h y $V_{h0} = X_h \cap H_0^1(a, b)$. El problema de (\mathcal{PV}) se escribiría:

$$(\mathcal{PV}_h) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } p_h \in X_h, p_h(a) = \alpha_1, p_h(b) = \beta_1, \\ \text{hallar } u_h \in X_h, u_h(a) = \alpha_2, u_h(b) = \beta_2 \quad \text{tales que} \\ a(p_h, v_h) = b(f, v_h) \quad \forall v_h \in V_{h0} \quad y \\ a(u_h, v_h) = b(p_h, v_h) \quad \forall v_h \in V_{h0}. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

En relación con la resolución numérica de la formulación variacional directa del problema de cuarto orden descrita en [VF], el número de grados de libertad sería el mismo, puesto que en este caso asociados a cada nodo se tendría el valor de una función y su derivada mientras que en la formulación mixta aparecen la solución y la función auxiliar. Por lo que se refiere a los espacios de elementos finitos, en la formulación mixta se utilizarían funciones de grado uno mientras que en la formulación variacional de [VF] necesita polinomios de grado tres. Como consecuencia, las matrices del sistema en este último caso serían pentadiagonales y de dimensión $2N$ siendo N el número de nodos, mientras que en la formulación mixta solo hay que almacenar una matriz de orden N tridiagonal.

4.2. Problema cuarto orden bidimensional

Problema continuo

Sea f una función continua en Ω , dadas g_1 y g_2 funciones suficientemente regulares se considera el problema

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{en } \Omega \\ u = g_1 & \text{en } \partial\Omega \\ -\Delta u = g_2 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Este problema corresponde, cuando $g_1 = 0, g_2 = 0$ a un modelo de placa apoyada, u denota el desplazamiento vertical de la placa en flexión, $-\Delta u$ es el momento flector en el borde de la placa y f representa las cargas, como la acción de la gravedad (véase [LL02]). El objetivo de esta sección es describir la obtención de la formulación mixta que consiste en la introducción de una variable auxiliar $p = -\Delta u$ con lo que el problema $(\hat{\mathcal{P}})$ se escribiría

$$(\hat{\mathcal{P}}) \begin{cases} -\Delta p = f & \text{en } \Omega \\ p = g_2 & \text{en } \partial\Omega, \\ -\Delta u = p & \text{en } \Omega \\ u = g_1 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde se ha transformado el problema de cuarto orden en la resolución de dos problemas de segundo orden.

La ventaja principal es que cuando se aborda la resolución del problema de cuarto orden con elementos finitos se necesita funciones de base polinómicas de grado alto ya que la formulación variacional involucra derivadas de orden dos. Como puede verse en la formulación mixta $(\hat{\mathcal{P}})$ solo tenemos que resolver un problema con la derivada de segundo

orden, en cuya formulación variacional solo intervienen derivadas de primer orden, lo que permite construir discretizaciones con funciones polinómicas de grado 1 que es lo que se ha hecho en esta memoria.

Formulación variacional del problema mixto

De la misma manera a como se ha hecho en el capítulo 3 se considerará un dominio poligonal. Sean las formas bilineales

$$a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{con} \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v.$$

$$b : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ con } b(u, v) = \int_{\Omega} uv.$$

La formulación variacional del problema mixto sería:

$$(\mathcal{PV}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } p \in H^1(\Omega), p = g_2 \text{ en } \partial\Omega \quad y \\ \text{hallar } u \in H^1(\Omega), u = g_1 \text{ en } \partial\Omega \quad \text{tales que} \\ a(p, v) = b(f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad y \\ a(u, v) = b(p, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Esta es la formulación variacional mixta del problema continuo. En [Cia91] se construye una formulación variacional del problema (\mathcal{P}) en la que interviene el operador laplaciano, mientras que en (\mathcal{PV}) solo aparece el operador gradiente.

Problema discretizado

Como se ha hecho en el capítulo 3 se considera una triangulación T_h del dominio poligonal Ω y se consideran los espacios de elementos finitos asociados de funciones afines a trozos X_h y $V_{h0} = X_h \cap H_0^1(\Omega)$. Sean g_{1h} y g_{2h} aproximaciones de g_1 y g_2 respectivamente en $\partial\Omega$ (como se ha hecho en el capítulo 3). El problema discretizado se escribe:

$$(\mathcal{PV}_h) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } p_h \in X_h, p_h = g_{2h} \text{ en } \partial\Omega \quad y \\ u_h \in X_h, u_h = g_{1h} \text{ en } \partial\Omega \quad \text{tales que} \\ a(p_h, v_h) = b(f, v_h) \quad \forall v_h \in V_{h0} \quad y \\ a(u_h, v_h) = b(p_h, v_h) \quad \forall v_h \in V_{h0} \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Los elementos finitos que se emplean para la discretización de la formulación variacional directa del problema de cuarto orden dada en [Cia91], son al menos de grado tres frente a las funciones afines que se emplean en esta memoria para la formulación mixta, con lo que

se consigue matrices de orden significativamente menor y además los grados de libertad relacionados, que son los que determinan el número de ceros en la matriz, también sería más pequeño.

Capítulo 5

Método del gradiente conjugado

En este capítulo se describe el método del gradiente conjugado que está diseñado para resolver sistemas lineales de la forma $Ax = b$ lo que sería equivalente a problemas de optimización cuadrática.

Sea $A \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y definida positiva, recordemos que bajo estas hipótesis tenemos que $A^t = A$ y que $x^t Ax > 0$ para $x \neq 0, x \in \mathbb{R}^N$. Denotaremos por $x^t y$ el producto escalar usual en \mathbb{R}^N como se ha hecho a lo largo de toda esta memoria. Una propiedad interesante de las matrices simétricas es que

$$x^t(Ay) = x^t Ay = x^t A^t y = (Ax)^t y.$$

Como hemos anticipado en el primer párrafo existe una relación directa entre resolver el sistema lineal con matriz de coeficientes simétrica definida positiva y resolver un problema de minimización.

Lema 5.1. *Sea $A \in M_{N \times N}$ una matriz simétrica y definida positiva, entonces el problema de resolver el sistema $Ax = b$ es equivalente al problema de minimizar la siguiente forma cuadrática*

$$J(x) = \frac{1}{2}x^t Ax - x^t b. \quad (5.1)$$

Demostración. Consideraremos $y = x + tv$ donde x y v son vectores y t un escalar. Un sencillo cálculo muestra que para un escalar t se tiene

$$\begin{aligned} J(y) &= \frac{1}{2}(x + tv)^t A(x + tv) - (x + tv)^t b \\ &= \frac{1}{2}(x^t Ax + tx^t Av + tv^t Ax + t^2 v^t Av) - x^t b - tv^t b \\ &= J(x) + tv^t Ax - tv^t b + \frac{1}{2}t^2 v^t Av = J(x) + tv^t (Ax - b) + \frac{1}{2}t^2 v^t Av. \end{aligned}$$

Como A es definida positiva el último sumando es positivo por lo tanto si $Ax - b = 0$ entonces J alcanza un mínimo en x .

Para establecer la relación con la resolución del sistema lineal solo hay notar que $\nabla J(y) = Ay - b$ y que la condición necesaria para la existencia de mínimo es $\nabla J(x) = 0$. \square

Observación 5.2. ■ 1) Puesto que la función J es cuadrática la matriz hessiana de J es A en todo punto $y \in \mathbb{R}^N$.

- 2) Dado que A es definida positiva la ecuación $\nabla J(x) = 0$ tiene solución única y es la única solución del problema de minimización.

El lema anterior sugiere un método iterativo para resolver el sistema lineal $Ax = b$, construyendo una sucesión de vectores $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ tales que $J(x^{(k)}) < J(x^{(k-1)})$ y que converjan a la solución del problema de minimización. Ésta es la idea de los conocidos métodos de descenso en optimización que no son el objeto de esta memoria, una descripción completa de los mismos puede consultarse en [SY06]. En cada iteración del método, calculado el nuevo punto debe elegirse una dirección de avance según la cual los valores de J se reduzcan. La primera idea, que no la única, sería tomar en el punto $x^{(k)}$ la dirección $v^{(k)} = -\nabla J(x^{(k)})$. Por eso también a todos estos métodos se les conoce en general como métodos de gradiente. Un aspecto que puede tener una gran influencia en la velocidad de convergencia del método es la elección del paso t . Una posible opción es dado un punto $x^{(k)}$ y una dirección $v^{(k)}$ elegir el paso que resuelve el problema de minimización monodimensional

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & J(x^{(k)} + tv^{(k)}), \\ & t \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{5.2}$$

lo que es conocido como cálculo del paso óptimo; en el caso cuadrático que nos ocupa se puede obtener una expresión analítica del mismo.

Proposición 5.3. *En las hipótesis del Lema 5.1 dados $v^{(k)} \neq 0$ y $x^{(k)}$ vectores de \mathbb{R}^N la solución del problema 5.2 es*

$$\alpha_k = \frac{(v^{(k)})^t(b - Ax^{(k)})}{(v^{(k)})^tAv^{(k)}}.$$

Demostración. Para calcular el mínimo buscaremos los ceros de la primera derivada respecto de t :

$$\frac{d}{dt}J(x^{(k)} + tv^{(k)}) = (v^{(k)})^t(Ax^{(k)} - b) + t(v^{(k)})^tAv^{(k)} = 0.$$

La solución de la ecuación anterior es

$$\alpha_k = \frac{(v^{(k)})^t(b - Ax^{(k)})}{(v^{(k)})^tAv^{(k)}}. \tag{5.3}$$

Además calculando la derivada segunda se tiene

$$\frac{d^2}{dt^2} J(x^{(k)} + tv^{(k)}) = (v^{(k)})^t A v^{(k)} > 0,$$

porque A es definida positiva, por lo que el punto crítico es en efecto un mínimo. \square

En la siguiente sección describiremos el método del gradiente conjugado que es una de las variantes de los métodos de descenso más frecuentemente utilizadas y que es el método empleado para resolver los sistemas de ecuaciones lineales que aparecen al discretizar ecuaciones diferenciales con elementos finitos.

5.1. Métodos de direcciones conjugadas

Se conocen como métodos de direcciones conjugadas a una familia de métodos que comparten la estrategia de resolver el sistema de ecuaciones lineales minimizando la función cuadrática (5.1). Empezaremos definiendo lo que son direcciones A -conjugadas.

Definición 5.4. Sea $A \in M_{N \times N}$ simétrica y definida positiva, sea un conjunto de vectores dado $\{u^{(1)}, \dots, u^{(k)}\} \subset \mathbb{R}^N - \{0\}, k \leq N$.

1. El conjunto se dice A -conjugado si

$$u^{(i)t} A u^{(j)} = 0 \quad 1 \leq i, j \leq N, \quad i \neq j.$$

2. El conjunto se dice A -ortonormal si

$$u^{(i)t} A u^{(j)} = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

Observación 5.5. Vectores A -conjugados son linealmente independientes, por lo que un conjunto de N vectores A -conjugados constituyen una base de \mathbb{R}^N .

En [KC91] se demuestra el siguiente teorema que proporciona un procedimiento iterativo mediante el cual dadas N direcciones A -ortonormales permite calcular en N pasos la solución del sistema lineal $Ax = b$.

Teorema 5.6. Sea $\{u^{(1)}, \dots, u^{(N)}\}$ un sistema A -ortonormal, se define

$$x^{(i)} = x^{(i-1)} + ((b - Ax^{(i-1)})^t u^{(i)}) u^{(i)} \quad 1 \leq i \leq N$$

donde $x^{(0)}$ es un punto arbitrario de \mathbb{R}^N . Entonces $Ax^{(N)} = b$.

Demostración. Definimos $t_i = (b - Ax^{(i-1)})^t u^{(i)}$ así la fórmula anterior quedaría

$$x^{(i)} = x^{(i-1)} + t_i u^{(i)},$$

y multiplicando por A

$$Ax^{(i)} = Ax^{(i-1)} + t_i Au^{(i)} \implies (Ax^{(i)} - Ax^{(i-1)})^t u^{(i)} = t_i.$$

Gracias a la A -ortonormalidad tenemos

$$\begin{aligned} Ax^{(N)} &= Ax^{(N-1)} + t_N Au^{(N)} = Ax^{(N-2)} + t_{N-1} Au^{(N-1)} + t_N Au^{(N)} = \dots = \\ &= Ax^{(0)} + t_1 Au^{(1)} + \dots + t_N Au^{(N)}, \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned} (Ax^{(N)} - b)^t u^{(i)} &= (Ax^{(0)} + t_1 Au^{(1)} + \dots + t_N Au^{(N)} - b)^t u^{(i)} = \\ &= (Ax^{(0)} - b)^t u^{(i)} + t_i, 1 \leq i \leq N. \end{aligned}$$

Demostraremos que la anterior ecuación es cero

$$\begin{aligned} t_i &= (b - Ax^{(i-1)})^t u^{(i)} \\ &= (b - Ax^{(i-2)})^t u^{(i)} + (Ax^{(i-2)} - Ax^{(i-1)})^t u^{(i)} = \dots \\ &= (b - Ax^{(0)})^t u^{(i)} + (Ax^{(0)} - Ax^{(1)})^t u^{(i)} + \dots + (Ax^{(i-2)} - Ax^{(i-1)})^t u^{(i)} \\ &= (b - Ax^{(0)})^t u^{(i)} + (-t_1 Au^{(1)})^t u^{(i)} + \dots + (-t_{i-1} Au^{(i-1)})^t u^{(i)} \\ &= (b - Ax^{(0)})^t u^{(i)}, \end{aligned}$$

gracias a la A -ortonormalidad. Por tanto

$$\begin{aligned} (Ax^{(N)} - b)^t u^{(i)} &= (Ax^{(0)} - b)^t u^{(i)} + t_i = \\ (Ax^{(0)} - b)^t u^{(i)} + (b - Ax^{(0)})^t u^{(i)} &= 0, 1 \leq i \leq N, \end{aligned}$$

con lo que $Ax^{(N)} - b$ es ortogonal a una base de \mathbb{R}^N , y por tanto $Ax^{(N)} = b$. \square

Un conjunto de vectores A -ortonormal está normalizado en la norma $\|v\|_A = (v^t A v)^{1/2}$. En la práctica sin embargo es más cómodo utilizar un sistema A -conjugado $\{v^{(1)}, \dots, v^{(N)}\}$. La relación entre uno y otro viene dada por

$$u^{(i)} = \left(\|v^{(i)}\|_A \right)^{-1} v^{(i)}, 1 \leq i \leq N,$$

siendo $\|v\|_A = \sqrt{v^t A v}$. Puede entonces darse una variante del teorema 5.6.

Teorema 5.7. Sea $\{v^{(1)}, \dots, v^{(N)}\}$ un sistema A -conjugado de vectores no nulos, para una matriz $A \in M_{N \times N}$ simétrica y definida positiva. Se define

$$x^{(i)} = x^{(i-1)} + \frac{(b - Ax^{(i-1)})^t v^{(i)}}{(v^{(i)})^t A v^{(i)}} v^{(i)}, \quad 1 \leq i \leq N$$

donde $x^{(0)}$ es un punto arbitrario de \mathbb{R}^N . Entonces $Ax^{(N)} = b$.

Demostración. Con las notaciones del teorema 5.6

$$x^{(i)} = x^{(i-1)} + ((b - Ax^{(i-1)})^t u^{(i)}) u^{(i)} = x^{(i-1)} + \frac{(b - Ax^{(i-1)})^t v^{(i)}}{(v^{(i)})^t A v^{(i)}} v^{(i)} \quad 1 \leq i \leq N$$

teniendo en cuenta que $\|v^{(i)}\|_A^2 = (v^{(i)})^t A v^{(i)}$. □

5.2. Método del gradiente conjugado

El método del gradiente conjugado (que se implementa en esta memoria) es un caso particular de los métodos de direcciones conjugadas. Se utiliza con sistemas lineales de la forma $Ax = b$ donde A es una matriz simétrica y definida positiva. De hecho, si A es una matriz muy grande y 'sparse' es recomendable utilizar el método del gradiente conjugado frente a métodos directos como Cholesky (véase [KC91] y [AB84]).

En el método del gradiente conjugado las direcciones de búsqueda $v^{(i)}$ son escogidas una a una durante el proceso iterativo y forman un sistema A -conjugado. Lo que caracteriza este método, sin embargo, es que los residuos $r^{(i)} = b - Ax^{(i)}$ forman un sistema ortogonal en el sentido usual, es decir, $(r^{(i)})^t r^{(j)} = 0$ si $i \neq j$.

Como se ha visto en la sección anterior el método del gradiente conjugado llegará a la solución en a lo sumo N pasos (en aritmética exacta). En la práctica sin embargo es usado como un método iterativo para producir una secuencia de vectores que convergen a la solución del sistema, Esto se hace fijando una tolerancia y haciendo un test de parada sobre los residuos del sistema, que pueden ser interpretados como los gradientes de la función J en los sucesivos iterantes.

Observación 5.8. En un problema bien condicionado el número de iteraciones necesarias para la convergencia del problema usando el método del gradiente conjugado puede ser incluso mucho menor que el orden del sistema (véase [AB84]) pero para un sistema mal condicionado puede ser mucho mayor.

Algoritmo

En [SY06] se introduce el método general de direcciones conjugadas que adopta la siguiente forma:

Dada una tolerancia $\varepsilon > 0$ y un punto inicial $x^{(0)}$,

Paso 1. Para $k = 0$ se calcula el gradiente $g^{(0)} = g(x^{(0)})$, y una dirección de descenso $v^{(0)} = -g^{(0)}$.

Paso 2. Test de parada: Si se cumple que $\|g^{(k)}\| \leq \varepsilon$ entonces fin del algoritmo.

Paso 3. Cálculo del paso α_k con minimización monodimensional: Hallar α_k tal que

$$J(x^{(k)} + \alpha_k v^{(k)}) = \min_{\alpha \geq 0} J(x^{(k)} + \alpha v^{(k)}).$$

Paso 4. Cálculo del nuevo punto $x^{(k+1)}$:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k v^{(k)}.$$

Paso 5. Cálculo de una nueva dirección de descenso $v^{(k+1)}$ mediante un método de direcciones conjugadas:

$$v^{(k+1)t} A v^{(j)} = 0, j = 0, \dots, k.$$

Paso 6. Se hace $k = k + 1$ y se vuelve al paso 2.

Los sucesivos iterantes que se calculan con el anterior algoritmo tienen la siguiente propiedad

Teorema 5.9. *En el algoritmo 5.2 cada iterante $x^{(i+1)}$ es solución del problema de minimización*

$$\min_{x \in V^i} J(x) \quad \text{siendo} \quad V^i = x^{(0)} + \langle \{v^{(0)}, \dots, v^{(i)}\} \rangle$$

Demostración. Tenemos que probar que $\nabla J(x^{(i+1)})$ es ortogonal a $v^{(j)}, \forall j = 0, \dots, i$. Para $i = 0$ se tiene que $x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_0 v^{(0)}$ y que $\nabla J(x^{(1)})$ es ortogonal a $v^{(0)}$ pues

$$J(x^{(1)}) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} J(x^{(0)} + \alpha v^{(0)}).$$

En particular $x^{(j+1)} = x^{(j)} + \alpha_j v^{(j)}$ con α_j de manera que

$$J(x^{(j+1)}) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} J(x^{(j)} + \alpha v^{(j)}),$$

lo que implica que $\nabla J(x^{(j+1)})$ es ortogonal a $v^{(j)}$. Definimos $y_k = \nabla J(x^{(k+1)}) - \nabla J(x^{(k)})$ y así tenemos que

$$\nabla J(x^{(i+1)})^t v^{(j)} = \nabla J(x^{(j+1)})^t v^{(j)} + \sum_{k=j+1}^i y_k^t v^{(j)} = 0 + \sum_{k=j+1}^i (\alpha_k A v^{(k)})^t v^{(j)},$$

pero $v^{(j)}$ es A -conjugado con $v^{(j+1)}, \dots, v^{(i)}$ por tanto $\nabla J(x^{(i+1)})^t v^{(j)} = 0, j = 1, \dots, i$ como queríamos ver. \square

Observación 5.10. En aritmética exacta cuando se hayan calculado $v^{(0)}, \dots, v^{(N-1)}$ direcciones A -conjugadas, $x^{(N)}$ será el punto que minimiza $J(x)$ en el espacio $V^{(N-1)}$ que es todo \mathbb{R}^N .

Hay varios procedimientos para hacer el paso 5, pero para una función J cuadrática todas son equivalentes. Utilizaremos $J(x) = \frac{1}{2}x^tAx - x^tb$ donde $A \in M_{N \times N}$ simétrica y definida positiva, $b \in \mathbb{R}^N$. Sean $v^{(i)}$ la direcciones de descenso en $x^{(i)}$ y $g^{(i)} = \nabla J(x^{(i)})$. Como $v^{(0)} = -g^{(0)}$ en la primera iteración tenemos

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_0 v^{(0)}$$

donde α_0 es el paso óptimo calculado en 5.3:

$$\alpha_0 = \frac{(-g^{(0)})^t v^{(0)}}{(v^{(0)})^t A v^{(0)}},$$

por lo que se tiene

$$g^{(1)t} v^{(0)} = 0.$$

Se busca una dirección descenso $v^{(1)}$ en $x^{(1)}$ ($(v^{(1)})^t g^{(1)} < 0$) que sea A -conjugada con $v^{(0)}$

$$v^{(1)} = -g^{(1)} + \beta_0 v^{(0)}. \quad (5.4)$$

Para ello tenemos que escoger β_0 tal que

$$v^{(1)t} A v^{(0)} = 0.$$

Se sigue de multiplicar (5.4) por $v^{(0)t} A$ que

$$\beta_0 = \frac{(g^{(1)})^t A v^{(0)}}{(v^{(0)})^t A v^{(0)}} = \frac{(g^{(1)})^t (g^{(1)} - g^{(0)})}{(v^{(0)})^t (g^{(1)} - g^{(0)})} = \frac{(g^{(1)})^t g^{(1)}}{(g^{(0)})^t g^{(0)}}$$

gracias al teorema 5.9 En general para la k -ésima iteración tenemos

$$v^{(k)} = -g^{(k)} + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i v^{(i)}. \quad (5.5)$$

Escogiendo un β_i tal que $(v^{(k)})^t A v^{(i)} = 0, i = 0, 1, \dots, k-1$ y notando que por el teorema 5.9 tenemos

$$(g^{(k)})^t v^{(i)} = 0, (g^{(k)})^t g^{(i)} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k-1,$$

al multiplicar 5.5 por $(v^{(j)})^t A, j = 0, \dots, k-1$ resulta

$$\beta_j = \frac{(g^{(k)})^t A v^{(j)}}{(v^{(j)})^t A v^{(j)}} = \frac{(g^{(k)})^t (g^{(j+1)} - g^{(j)})}{(v^{(j)})^t (g^{(j+1)} - g^{(j)})} \quad j = 0, 1, \dots, k-1.$$

Entonces

$$\beta_j = 0, j = 0, \dots, k-2$$

y así

$$\beta_{k-1} = \frac{(g^{(k)})^t(g^{(k)} - g^{(k-1)})}{(v^{(k-1)})^t(g^{(k)} - g^{(k-1)})} = \frac{(g^{(k)})^t g^{(k)}}{(g^{(k-1)})^t g^{(k-1)}},$$

lo que da en cada iteración el cálculo del nuevo punto y de la nueva dirección

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \alpha_k v^{(k)}, \\ v^{(k)} &= -g^{(k)} + \beta_{k-1} v^{(k-1)}, \end{aligned}$$

donde α_k es el paso óptimo de 5.3, para el caso cuadrático:

$$\alpha_k = \frac{(-g^{(k)})^t v^{(k)}}{(v^{(k)})^t A v^{(k)}}.$$

Una importante propiedad sobre el comportamiento de los vectores residuo se recuerda en el siguiente teorema:

Teorema 5.11. *En el algoritmo del gradiente conjugado, para todo entero $m < N$ si las direcciones $v^{(0)}, \dots, v^{(m)}$ son no nulas, entonces $r^{(i)} = b - Ax^{(i)}$ para $0 \leq i \leq m$ y además $\{r^{(0)}, \dots, r^{(m)}\}$ es un conjunto de vectores no nulos y ortogonales.*

La demostración de este teorema así como algunas otras propiedades interesantes de los residuos se pueden encontrar en [KC91].

Para terminar este capítulo se enuncia un resultado de convergencia de [QS06].

Proposición 5.12. *Sea $A \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y definida positiva. El método del gradiente conjugado para resolver el sistema de ecuaciones $A\hat{x} = b$ converge tras a lo sumo N iteraciones en aritmética exacta. Además el error $e^{(k)} = x^{(k)} - \hat{x}$ en la k -ésima iteración con $k \leq N$ es ortogonal a $v^{(j)}$ para $j = 0, \dots, k-1$ y*

$$\|e^{(k)}\|_A \leq \frac{2c^k}{1 + c^{2k}} \|e^{(0)}\|_A, \quad \text{con} \quad c = \frac{\sqrt{\text{cond}_2(A)} - 1}{\sqrt{\text{cond}_2(A)} + 1},$$

siendo $\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$.

Capítulo 6

Resultados numéricos

Los códigos elaborados se han validado con varios ejemplos test. En la primera sección se muestran los resultados del problema monodimensional, tanto en el caso del problema de segundo orden como el de cuarto orden. En la segunda se presentan los resultados del problema bidimensional de segundo orden y de cuarto orden, para terminar con un clásico test de placa apoyada.

6.1. Problema monodimensional

6.1.1. Resolución numérica del problema de segundo orden

Test 1

- $u(x) = x^2$
- $f(x) = -2$
- $I = [a, b] = [0, \frac{\pi}{2}]$
- $\alpha = 0, \quad \beta = \frac{\pi^2}{4}$

N	$\ u - u_h\ _{0,2}$	$\ u - u_h\ _{1,2}$
10	6.312e-3	1.136e-1
100	6.312e-5	1.136e-2
1000	6.312e-7	1.136e-3

Tabla de errores en norma L^2 y H^1

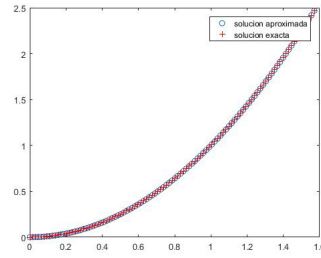


Figura 6.1: Solución exacta-solución aproximada N=100

Test 2

- $u(x) = \sin(x)$
- $f(x) = -\sin(x)$
- $I = [a, b] = [0, \frac{\pi}{2}]$
- $\alpha = 0, \beta = 1$

N	$\ u - u_h\ _{0,2}$	$\ u - u_h\ _{1,2}$
10	5.574e-3	4.184e-2
100	6.544e-5	4.027e-3
1000	7.036e-7	4.019e-4

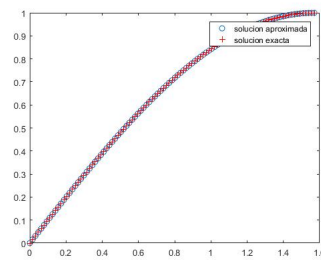
Tabla de errores en norma L^2 y H^1 

Figura 6.2: Solución exacta-solución aproximada N=100

6.1.2. Problema de cuarto orden monodimensional

En esta sección solo presentaremos resultados sobre la solución u .

Test 3

- $u(x) = x^2$
- $f(x) = 0$
- $I = [a, b] = [1, 3]$
- $u(1) = 1, u(3) = 9, u''(1) = -2, u''(3) = -2$

N	$\ u - u_h\ _{0,2}$	$\ u - u_h\ _{1,2}$
10	1.154e-2	1.632e-1
100	1.154e-4	1.632e-2
1000	1.154e-6	1.632e-3

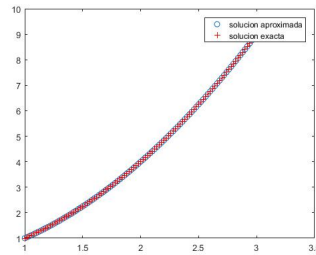
Tabla de errores en norma L^2 y H^1 

Figura 6.3: Solución exacta-solución aproximada N=100

Test 4

- $u(x) = e^{x/2}$
- $f(x) = \frac{e^{x/2}}{16}$
- $I = [a, b] = [1, 3]$
- $u(1) = e^{1/2}, u(3) = e^{3/2}, u''(1) = \frac{e^{1/2}}{-4}, u''(3) = \frac{e^{3/2}}{-4}$

N	$\ u - u_h\ _{0,2}$	$\ u - u_h\ _{1,2}$
10	3.829e-3	6.014e-2
100	3.827e-5	6.015e-3
1000	3.827e-7	6.015e-4

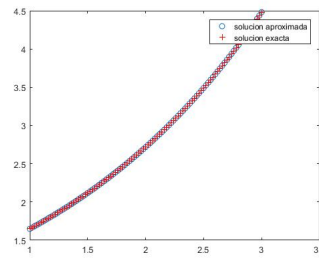
Tabla de errores en norma L^2 y H^1 

Figura 6.4: Solución exacta-solución aproximada N=100

6.2. Problema bidimensional

6.2.1. Resolución numérica del problema de segundo orden

Test 5

- $u(x, y) = 2x + 3y$
- $f(x) = 0$
- $\Omega = [0, 2] \times [0, 1]$
- $u(x, 0) = 2x, \quad u(0, y) = 3y, \quad u(x, 1) = 2x + 3, \quad u(2, y) = 4 + 3y$

Nel	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$	$\ u - u_h\ _{1,\Omega}$
100	8.915e-11	1.106e-9
367	1.438e-10	1.312e-9
1405	1.938e-11	2.770e-9

Tabla de errores en norma L^2 y H^1

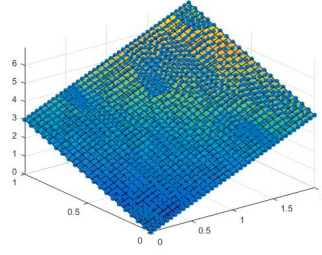


Figura 6.5: Solución exacta-solución aproximada (puntos) Nel=1405

Test 6

- $u(x, y) = (x^2 - 2x)(y^2 - y)$
- $f(x) = 4x - 2y^2 + 2y - 2x^2$
- $\Omega = [0, 2] \times [0, 1]$
- $u(x, 0) = 0, \quad u(0, y) = 0, \quad u(x, 1) = 0, \quad u(2, y) = 0$

Nel	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$	$\ u - u_h\ _{1,\Omega}$
100	5.768e-3	1.030e-1
367	1.488e-3	5.224e-2
1405	3.761e-4	2.624e-2

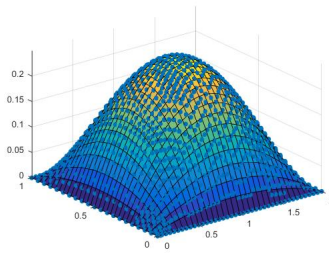
Tabla de errores en norma L^2 y H^1 

Figura 6.6: Solución exacta-solución aproximada (puntos) Nel=1405

Test 7

- $u(x, y) = \cos\left(\frac{x\pi}{2}\right) + \sin(y\pi)$

- $f(x) = (\pi^2/4)\cos(x\pi/2) + \pi^2\sin(y\pi)$
- $\Omega = [0, 2] \times [0, 1]$
- $u(x, 0) = \cos(\frac{x\pi}{2}), \quad u(0, y) = 1 + \sin(y\pi), \quad u(x, 1) = \cos(\frac{x\pi}{2}), \quad u(2, y) = -1 + \sin(y\pi)$

Nel	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$	$\ u - u_h\ _{1,\Omega}$
100	2.850758e-2	4.417117e-1
367	7.277454e-3	2.233422e-1
1405	1.833392e-3	1.121338e-1

Tabla de errores en norma L^2 y H^1

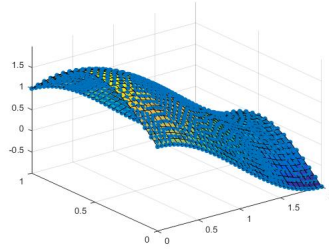


Figura 6.7: Solución exacta-solución aproximada (puntos) Nel=1405

6.2.2. Problema de cuarto orden bidimensional

Test 8

- $u(x, y) = x^3 + y^3$
- $p(x, y) = -6(x + y)$
- $f(x) = 0$
- $\Omega = [0, 2] \times [0, 1]$
- $u(x, 0) = x^3, \quad u(0, y) = y^3, \quad u(x, 1) = x^3 + 1, \quad u(2, y) = 8 + y^3$
- $p(x, 0) = -6x, \quad p(0, y) = -6y, \quad p(x, 1) = -6(x + 1), \quad p(2, y) = -6(2 + y)$

Nel	$\ p - p_h\ _{0,\Omega}$	$\ p - p_h\ _{1,\Omega}$	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$	$\ u - u_h\ _{1,\Omega}$
100	7.073e-13	1.005e-11	3.460e-2	4.544e-1
367	1.613e-12	2.367e-11	8.857e-3	2.325e-1
1405	1.957e-12	2.612e-11	2.234e-3	1.172e-1

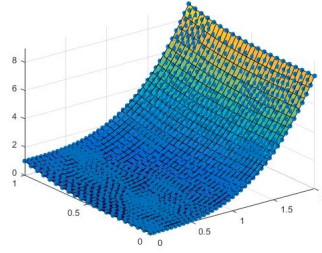
Tabla de errores en normas L^2 y H^1 para u y $p = -\Delta u$ 

Figura 6.8: Solución exacta-solución aproximada Nel=1405

Puesto que en este test $-\Delta u = p$ es una función de grado uno está calculada exactamente.

Test 9

- $u(x, y) = \cos(x)\sin(y)$
- $p(x, y) = 2\cos(x)\sin(y)$
- $f(x) = 4\cos(x)\sin(y)$
- $\Omega = [0, 2] \times [0, 1]$
- $u(x, 0) = 0, u(0, y) = \sin(y), u(x, 1) = \cos(x)\sin(1), u(2, y) = \cos(2)\sin(y)$
- $p(x, 0) = 0, p(0, y) = 2\sin(y), p(x, 1) = 2\cos(x)\sin(1), p(2, y) = 2\cos(2)\sin(y)$

Nel	$\ p - p_h\ _{0,\Omega}$	$\ p - p_h\ _{1,\Omega}$	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$	$\ u - u_h\ _{1,\Omega}$
100	6.868e-3	1.442e-1	3.428e-3	7.211e-2
367	1.739e-3	7.257e-2	8.685e-4	3.628e-2
1405	4.368e-4	3.637e-2	2.181e-4	1.818e-2

Tabla de errores en normas L^2 y H^1 para u y $p = -\Delta u$

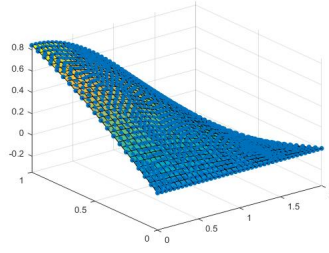


Figura 6.9: Solución exacta-solución aproximada Nel=1405

Test 10 (placa apoyada)

- $u(x, y) = u(x, y) = (\sin(\pi x) \sin(2\pi y))^2$
- $p(x, y) = -2\pi^2(4\sin(\pi x)^2 - 10\sin(\pi x)^2 \sin(2\pi y)^2 + \sin(2\pi y)^2)$
- $f(x) = 8\pi^4(50\sin(\pi x)^2 \sin(2\pi y)^2 - 24\sin(\pi x)^2 - 9\sin(2\pi y)^2 + 4)$
- $\Omega = [0, 2] \times [0, 1]$
- $u(x, 0) = 0, \quad u(0, y) = 0, \quad u(x, 1) = 0, \quad u(2, y) = 0$
- $p(x, 0) = -8\pi^2 \sin(\pi x)^2, \quad p(0, y) = -2\pi^2 \sin(2\pi y)^2, \quad p(x, 1) = -8\pi^2 \sin(\pi x)^2, \quad p(2, y) = -2\pi^2 \sin(2\pi y)^2$

Nel	$\ p - p_h\ _{0,\Omega}$	$\ p - p_h\ _{1,\Omega}$	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$	$\ u - u_h\ _{1,\Omega}$
100	3.385e+1	3.677e+2	4.488e-1	2.638e+0
367	1.824e+1	1.949e+2	1.057e-1	1.244e+0
1405	1.480e+1	1.052e+2	1.860e-1	9.869e-01

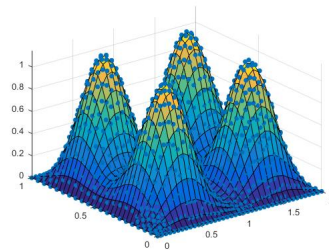
Tabla de errores en normas L^2 y H^1 para u y $p = -\Delta u$ 

Figura 6.10: Solución exacta-solución aproximada Nel=1405

Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo se ha implementado la resolución numérica del problema lineal autoadjunto de cuarto orden mediante una formulación mixta, que involucra únicamente operadores de segundo orden, por lo que la discretización con elementos finitos puede realizarse de manera eficiente con funciones polinómicas de grado uno a trozos y no de grado al menos tres, como sería imprescindible hacerlo de abordar el problema directamente. Además de trabajar con elementos finitos de menor grado, las matrices de masa y rigidez elementales son de menor dimensión y la matriz global del sistema es de menor dimensión con menos coeficientes distintos de cero. Atendiendo especialmente al caso de dimensión dos se han resuelto los sistemas de ecuaciones lineales con un método de gradiente conjugado ya que los métodos directos, aunque conservan el perfil, pueden resultar algo ineficientes para matrices de gran tamaño (que se corresponderían con mallas muy finas). Una futura mejora del código incluiría la implementación de técnicas de preconditionamiento para el sistema, que en la memoria solo se han ensayado a través de la función correspondiente de **matlab**. El problema que se ha resuelto es el del biplaciano y quedaría abierto resolverlo a operadores de cuarto orden más generales que admiten una factorización en dos operadores elípticos autoadjuntos.

Anexo

En este anexo se incluirá solo el código del problema de cuarto orden en 2D cuya programación era el objetivo de esta memoria. Solo se pondrá el código para un test (el trigonométrico), con la opción para ejecutar el programa desde un '.txt' obtenido anteriormente, es decir se obviarán en este anexo los subprogramas relacionados con escoger mallas a través de pdetool así como el programa que realiza la conversión de estas a '.txt'. Mencionar por último que solo usaremos la malla con mayor refinamiento en este anexo.

Programa problema cuarto orden en 2D

Programa principal

```
% elementos finitos 2d problema de poisson

%antes de nada hay que iniciar manualmente la malla y exportarla
%con el script elige malla, el clear all esta en el elige malla,pues si no
%perderiamos los datos al iniciar el programa

%op=1(primer metodo cargamos la malla desde txt, generada antes por
%nosotros(vease eligemalla)vease instrucciones.txt

tic
clc
clear all %cuando exportamos malla no podemos tenerlo (op=0)

%NOTA fr tipo de diriclheth ver elfin_2d para mas detalles
%!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
%PRIMER METODO
```

```

[op,fichmalla,fichsalida,ex,iopquad,f,sol,dsol,g...
,solp,dsolp,gp ]=datost_5orden_1;
%!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
%OTRO METODO
%EJECUTAR POR SEPARADO eligemalla
[op,fichmalla,fichsalida,ex,iopquad,f,sol,dsol,g...
% ,solp,dsolp,gp ]=datost_4orden_1_bis;
%!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

% ofi1 fichero para salida de datos "salida"
ofi1 = fopen(fichsalida,'wt');

fprintf(ofi1,'\n* Opcion para la solucion exacta: ex = %-i', ex);

% ES LA SOLUCION EXACTA CONOCIDA (ex = 1) O NO (otro valor)?
if (ex == 1)
fprintf(ofi1,' (la solucion exacta es conocida).');
else
fprintf(ofi1,' (la solucion exacta no es conocida).');
end

%METODO DE LECTURA DE MALLA op=0 desde elige malla op=1 desde txt
if op==0
% ofi2 fichero para salida de datos "datosmalla"
ofi2 = fopen(fichmalla,'wt');
[nnodos,nele,nar] = mallaprint(p,e,t,ofi2);
ofi2 = fopen(fichmalla,'r');
[nnodos,nele,nar,p,e,t] = mallaread0(ofi2);%asi nos aseguramos que e(3,:)=e(5,:) para cualq

elseif op==1
% ofi2 fichero txt con la malla anteriormente guardada
ofi2 = fopen(fichmalla,'r'); %poner aqui la malla.txt
[nnodos,nele,nar,p,e,t] = mallaread0(ofi2); %lee el txt con la malla
else fprintf('error en seleccion de op')

```

end

```
[p_h,Rold,Mold]=elfin_2d(nodos,nele,nar,p,t,e,f,gp,iopquad,ofi1);
```

```
% calculo de error e p=-Delta(u)
```

```
if ex==1
```

```
for i=1:size(p,2)
```

```
solexh(i)=solp(p(:,i));
```

```
end
```

```
%solexh=feval(funsol1,p)
```

```
escribe_vfich(ofi1,'*SOLUCION EXACTA (p)\n',solexh);
```

```
[error,indice]=max(abs(solexh-p_h')); 
```

```
fprintf(ofi1,'\n*ERROR EN NORMA INF (p): %e \n',error);
```

```
fprintf('\n*ERROR EN NORMA INF (p): %e \n',error);
```

```
fprintf(ofi1,'\n*EN NODO (p) : %i %e %e \n',indice,p(1,indice),p(2,indice));
```

```
fprintf('\n*EN NODO (p) : %i %e %e \n',indice,p(1,indice),p(2,indice));
```

```
%Error en norma L2
```

```
xnorl2=norl2(nele,t,p,p_h,solp);
```

```
fprintf(ofi1,'\nNorma L2 (p) %e',xnorl2);
```

```
%Error en norma H1
```

```
xnorh1=norh1(nele,t,p,p_h,dsolp);
```

```
fprintf(ofi1,'\nNorma H1 (p) %e \n ',xnorh1);
```

```
fprintf('\nNorma H1 (p) %e \n ',xnorh1);
```

```
%!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
```

```
%figure(3)
```

```
%hold on
```

```
%plot(p,solexh,'+r');
```

```
%legend('solucion aproximada','solucion exacta');
```

```
%hold off
```

```
else
```

```
fprintf(ofi1,'no se puede saber el error pues no se dispone de la solucion exacta')
```

```
end
```

```
% calculo del segundo miembro a partir de p_h
```

```
b=Mold*p_h;
```

```

u_h=elfin_2d_bis(Rold,nnodos,nele,nar,p,t,e,b,g,iopquad,ofi1);

% calculo de error e p=-Delta(u)
if ex==1
for i=1:size(p,2)
solexh(i)=sol(p(:,i));
end
%solexh=feval(funsol1,p)
escribe_vfich(ofi1,'*SOLUCION EXACTA\n',solexh);
[error,indice]=max(abs(solexh-u_h'));
fprintf(ofi1,'\n*ERROR EN NORMA INF: %e \n',error);
fprintf('\n*ERROR EN NORMA INF: %e \n',error);
fprintf(ofi1,'\n*EN NODO : %i %e %e \n',indice,p(1,indice),p(2,indice));
fprintf('\n*EN NODO : %i %e %e \n',indice,p(1,indice),p(2,indice));
%Error en norma L2
xnorl2=norl2(nele,t,p,u_h,sol);
fprintf(ofi1,'\nNorma L2 %e',xnorl2);
%Error en norma H1
xnorh1=norh1(nele,t,p,u_h,dsol);
fprintf(ofi1,'\nNorma H1 %e \n ',xnorh1);
fprintf('\nNorma H1 %e \n ',xnorh1);
%!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
%figure(3)
%hold on
%plot(p,solexh,'+r');
%legend('solucion aproximada','solucion exacta');
%hold off

else
fprintf(ofi1,'no se puede saber el error pues no se dispone de la solucion exacta')
end

toc

```

Programas de datos**Datost5orden1**

```
function [op,fichmalla,fichsalida,ex,iopquad,funf,funsol,fundsol,func...
,funsolp,fundsolp,funcp ]=datost_5orden_1
% datos con malla ya creada
ex=1;
op=1;
fichmalla='malla0NR3.txt'; %aqui ponemos la malla que queremos
fichsalida='resul0_5ordenNR1.txt';
iopquad=3; % opcion cuadratura
funf=@funf5;
funsol=@funsol5;
fundsol=@graddsol5;
func=@g5;
funsolp=@funsolp5;
fundsolp=@graddsolp5;
funcp=@gp5;
return
```

malla0NR3.txt

No se va a incluir debido a su gran extensión.

funf5

```
function sol = funf5(x)
sol=4*(cos(x(1))*sin(x(2)));
end
```

funsol5

```
function sol = funsol5(x)
sol=cos(x(1))*sin(x(2));
end
```

graddsol5

```
function dsol = graddsol5(x)
```

```
dsol(1)= -sin(x(1))*sin(x(2));  
dsol(2)= cos(x(1))*cos(x(2));  
end
```

g5

```
function val=g5(z,iref)  
% (z_1,z_2)  
val=funsol5(z);  
return  
end
```

funsolp5

```
function sol = funsolp5(x)  
sol=2*(cos(x(1))*sin(x(2)));  
end
```

graddsolp5

```
function dsol = graddsolp5(x)  
dsol(1)= 2*(-sin(x(1))*sin(x(2)));  
dsol(2)= 2*(cos(x(1))*cos(x(2)));  
end
```

gp5

```
function val=gp5(z,iref)  
% (z_1,z_2)  
val=funsolp5(z);  
return  
end
```

Subprogramas

mallaread0

```
function [nnodos,nele,nar,p,e,t] = mallaread0(ofi2)
% Accede al fichero de malla generado por mallaprint,
% lee la malla y cierra el fichero
% Entrada
%   ofi2   identificado de la malla
% Salida
%   p     nodos de la malla
%   e     aristas e informacion de los triangulos
%   t     triangulos de la malla
%
% function complementaria mallaprint0
%
malla=fscanf(ofi2,'%e');
nnodos=malla(1);
nele=malla(2);
nar=malla(3);
e=zeros(3,nar);
p=zeros(2,nnodos);
t=zeros(4,nele);
index=4;
for i=1:nnodos;
    index;
    p(1:2,i)=malla(index:index+1)';
    index=index+2;
end
for i=1:nar;
    e(1:3,i)=malla(index:index+2)';
    index=index+3;
end
for i=1:nele;
    t(1:4,i)=malla(index:index+3)';
    index=index+4;
end
```

```
fclose(ofi2);
return
```

elfin2d

```
function [u_h, Rold,M]=elfin_2d(N,nele,nar,p,t,e,f,g,ord,ofi1)
%resolucion con elemetos finitos de lagrange de un problema
% -Delta u= f en \Omega
%      u = g en \partial \Omega
%
%   N          #nnodos;
%   nele       #elementos
%   nar        #aristas en al frontera
%   p(1:2,N)   coordenadas de nodos
%   t(1:4,nele) conectividad y referencia de elemento
%   e(1:3,nar) indice de los nodos extremos y referencia de arista
%   f,g        datos de la EDP
%   ord        opcion de formula de cuadratura de segundo miembro
%
%ENSAMBLADO
% Assemble global matrices and vector

[R,M,b] = AssembleGlobalMatrices(t,p,f,ord);
Rold=R;
%RESOLUCION
% BLOQUEO DE LOS GRADOS DE LIBERTAD EN LA FRONTERA
[R, b]=gboundary(R,p,e,g,b);
u_h =b          ;          % initialize solution tozeros

%ORIGINAL
% u_h = R\b; % resuelve para todos pues b esta actualizado

% GRADIENTE MIO
itmax=10000;
tol=1.e-10;
```



```

x0=zeros(N,1);
[u_h,nor_grad,index_conver] =grad_conj(R,b,x0,itmax,tol,ofi1);
% CGS
[u_h,iflag,nor_grad,index_conver]=cgs(R,b,tol,itmax)

%PCG
[u_h,iflag,nor_grad,index_conver]=pcg(R,b,tol,itmax)

fprintf(ofi1,'\nSOLUCION\n')
fprintf(ofi1,'%e\n',u_h)
% Plot triangular solution
figure(1); clf; trisurf(t(1:3,:)',p(1,:)',p(2,:)',u_h)
grafica(2,p,u_h)
end

```

AssembleGlobalMatrices

```

function [St,Ma,b] = AssembleGlobalMatrices(t,p,f,ord)
% Ensambla la matriz global de rigidez
% a_ji = (nabla psi_i, nabla psi_j)
% en el lado derecho b_j = (f,psi_j).
%
% t    3 x M        M triangulos
% p    2 x N        N nodos (1st row x-coord, 2nd row y-coord)
% f    fhandle      funcion segundo miembro
% ord                opcion integracion
% S    N x N        matriz de rigidez
% K    N x N        matriz de masa
% b    N x 1        segundo miembro

M = size(t,2);
N = size(p,2);
St = sparse(N,N);
Ma = sparse(N,N);
b = zeros(N,1);
%funcion la la integracion en el elemento de referencia

```

```

[iw,ip] = RefElemQuad(ord);
%funcion de las funciones de base
[basis_ip,grad_basis_ip] = basis_linear(ip);

Local_M_matr = zeros(3,3);
Local_S_matr = zeros(3,3);
Local_load = zeros(3,1);
for k = 1:M
    nodes = p(:,t(1:3,k));
    C = [ nodes(:,2)-nodes(:,1) , nodes(:,3)-nodes(:,1) ];
    cv = nodes(:,1);
    Cdet = C(1,1)*C(2,2)-C(1,2)*C(2,1);
    CinvT = (1/Cdet) * [ C(2,2) , -C(2,1) ; -C(1,2), C(1,1) ];
    ip_local = C * ip + kron(cv,ones(1,length(ip)));
    f_at_ip = f( ip_local );

    %ensamblado en si
    for i = 1 : 3
        Local_load( i ) = (f_at_ip .* basis_ip(i,:)) * iw' * Cdet;
    for j = 1 : 3
        Local_M_matr(i,j) = basis_ip(i,:).*basis_ip(j,:)*iw'*Cdet;
        Local_S_matr(i,j) = (CinvT * grad_basis_ip(:,1,i))' * ...
            (CinvT * grad_basis_ip(:,1,j)) * Cdet;
    end
    end

    %contribucion a la global
    b( t(1:3,k) ) = b( t(1:3,k) ) + Local_load;
    St( t(1:3,k), t(1:3,k) ) = St( t(1:3,k), t(1:3,k) ) + Local_S_matr;
    Ma( t(1:3,k), t(1:3,k) ) = Ma( t(1:3,k), t(1:3,k) ) + Local_M_matr;
end
end

```

RefElemQuad

```

function [ w,p ] = RefElemQuad( order )
%integracion en el elemento de referencia
% order      orden de cuadratura
% w          1xN      pesos
% p          2xN      puntos

switch order
case 1 %esquema exacto polinomios grado no sup a 1,con 1 nodo
w = 1/2;
p = [ 1/3 ; 1/3 ];
case 2 %esquema exacto polinimios grado no sup a 2,con 3 nodos
w = (1/6)*[1,1,1];
p = [ 0, 0.5, 0.5; 0.5, 0, 0.5];
case 3 %esquema exacto polinimios grado no sup a 3,con 7 nodos
w = (1/48)*[-27, 25, 25, 25];
p = [ 1/3, 2/15, 2/15, 11/15 ; ...
1/3, 11/15, 2/15, 2/15 ];

%Tanto el 4 como el 5 son esquemas mas complejos que no se usaran
case 4
w1 = 0.22338158967801;
w2 = 0.10995174365532;
w = [ w1, w1, w1, w2, w2, w2 ];
a = 0.44594849091597;
b = 0.10810301816807;
c = 0.09157621350977;
d = 0.81684757298046;
p = [ a, a, b, c, c, d ; a, b, a, c, d, c];
case 5
w2 = 0.13239415278851;
w3 = 0.12593918054483;
w = [ 0.225, w2, w2, w2, w3, w3, w3 ];
a = 0.47014206410511;
b = 0.05971587178977;
c = 0.10128650732346;

```

```

d = 0.79742698535309;
p = [ 1/3, a, a, b, c, c, d; ...
      1/3 a, b, a, c, d, c];
otherwise
error(['RefElemQuad: variable order mal definida.'...
'Tiene que ser un entero entre 1 y 5.']);
end
return

```

basislinear

```

function [value,d_value] = basis_linear(x)
%Evalua las funciones de base en los triángulos 2D
% base de referencia
% 1    1-x-y    (0,0)
% 2    x        (1,0)
% 3    y        (0,1)
% x,   (2 X M) conjunto de puntos
% value, (3 X M) valor funciones de base en el punto x
% d_value, (2 x 3 x M) valor gradientes en el punto x
M = size(x,2);
value = zeros( 3 , M );
value(1,:) = ones(1,M) - x(1,:) - x(2,:);
value(2,:) = x(1,:);
value(3,:) = x(2,:);
d_value=zeros(2,M,3);
v = ones(1,M);
d_value(:,:,1) = [-v ; -v];
d_value(:,:,2) = [ v ; zeros(1,M) ];
d_value(:,:,3) = [ zeros(1,M) ; v ];
return

```

gboundary

```

function [R,b]=gboundary(R,p,e,g,b)
% bloqueo para metodos gradiente conjugado
% entrada

```

```
%      p      puntos
%      g      funcion
%      e      variable arista de la malla (e(1,:) primer vertice, e(2,:) segundo vertice e
%
%              nodos frontera
```

```
%!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
```

```
nmb=size(e,2); %numero nodos frontera
for k=1:nmb
    ngl=e(1,k); %numero grados de libertad guarda los veertices de la frontera 1,5,6,..
    zz(1:2)=p(1:2,ngl);%asi guarda solo los puntos de p que son de la frontera
    %!!!!!!!!!!!!
    iref=e(3,k); %referencia de la parte de la frontera en la que estamos
    valor_nodo=feval(g,zz,iref);
    % bloqueo
    for i=1:ngl-1
        b(i)=b(i)-R(i,ngl)*valor_nodo;
        R(i,ngl)=0.;
        R(ngl,i)=0;
    end
    for i=ngl+1:size(b)
        b(i)=b(i)-R(i,ngl)*valor_nodo;
        R(i,ngl)=0.;
        R(ngl,i)=0;
    end
    R(ngl,ngl)=1.;
    b(ngl)=valor_nodo;
    %!!!!!!!!!!!!NOTA aqui e(3,k) modificado es la 5 por defecto
    %g funcion frontera,zz los pts frontera,iref ref frontera
end
return
end
```

gradconj

```
%-----metodo del gradiente conjugado-----
```

```

function [sol,nor_grad,index_conver] =grad_conj(a,b,x0,itmax,tol,ofi);
%-----indice de convergencia-----
%index_conver=-1 alcanzadas nitmax sin que converja
%index_conver=1 convergencia alcanzada

%resolución en si
d=b-(a*x0);
r=-d;
x=x0;
for i=1:itmax;
alfa=(r'*r)/(d'*a*d);
x0=x;
x=x+(alfa*d);
r0=r;
%%%%%%%%%%%%%%
% de repente r=alfa*a*d
r=r+(alfa*a*d);
beta=(r'*r)/(r0'*r0);
d=-r+(beta*d);

nor_grad=norm(-d); %son iguales
diferencia=x-x0;
nor_dif=norm(diferencia); %norma de la diferencia
%norma del gradiente=norma del residuo(el signo no importa)
if (nor_grad)<tol;
sol=x;
index_conver=1;
%-----escritura en fichero-----
fprintf(ofi,'\n-----i=%i----- \n', i);
fprintf(ofi,'\nnorma-gradiente=%e \n',nor_grad);
fprintf(ofi,'\n#solución\n');
fprintf(ofi,'%f \n',x);
fprintf(ofi,'\n#diferencia\n');
fprintf(ofi,'%e\n',diferencia);
fprintf(ofi,'\nnorma-diferencia-iterantes=%e \n',nor_dif);
fprintf(ofi,'\n#CONVERGENCIA\n');

```

```

return
%else
%fprintf(ofi,'-----i=%i----- \n', i);
%fprintf(ofi,'\nnorma-gradiente=%e \n',nor_grad);
%fprintf(ofi,'\n#iterante\n');
%fprintf(ofi,'%f \n',x);
%fprintf(ofi,'\n#diferencia\n');
%fprintf(ofi,'%e\n',diferencia);
%fprintf(ofi,'\nnorma-diferencia-iterantes=%e \n',nor_dif);
%fprintf(ofi,'\n#no convergencia \n');

end
end
index_conver=-1;
fprintf(ofi,'alcanzadas itmax=%i sin que converja',itmax);
fprintf('\nalcanzadas itmax=%i sin que converja\n',itmax);
sol=0;
return
end

```

escribevfich

```

function escribe_vfich(salida,texto,x)
%
% escribe en fichero un texto y un vector en fila
% ejemplo de uso:  escribe_vfich(salida,'gradiente',d);
%
% entrada
% texto
% x      vector
% salida identificacion de fichero
%

m=length(x);
fprintf(salida,texto,'\n');
i2=0;

```

```

for k=1:m/7
i1=(k-1)*7+1;
i2=k*7;
fprintf(salida,' %e ',x(i1:i2));
fprintf(salida,'\n');
end
if(i2<m)
fprintf(salida,' %e ',x(i2+1:m));
fprintf(salida,'\n');
end
return

```

norl2

```

function xnorl2=norl2(nel,mm,z,b,sol)
% calculo del error en norma L^2
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% nel numero de elementos
% mm conectividades triangulos (t)
% z vertices (p)
% b solucion aproximada
%sol solucion exacta
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
xnorl2=0;
for k=1:nel
%
% calculos previos
%
mm1=mm(1,k);
mm2=mm(2,k);
mm3=mm(3,k);
%
for i=1:2
z1(i)=z(i,mm1);
z2(i)=z(i,mm2);
z3(i)=z(i,mm3);

```



```

end
b1=b(mm1);
b2=b(mm2);
b3=b(mm3);
%
% puntos medios
%
x(1,1)=(z1(1)+z2(1))*0.5;
x(2,1)=(z1(2)+z2(2))*0.5;
x(1,2)=(z3(1)+z2(1))*0.5;
x(2,2)=(z3(2)+z2(2))*0.5;
x(1,3)=(z1(1)+z3(1))*0.5;
x(2,3)=(z1(2)+z3(2))*0.5;

ab=z2(1)-z1(1);
bc=z2(2)-z1(2);
cd=z3(1)-z1(1);
de=z3(2)-z1(2);
deter=ab*de-bc*cd;
%
q(1)=(b1+b2)*0.5;
q(2)=(b3+b2)*0.5;
q(3)=(b1+b3)*0.5;
sum=0;
for i=1:3
aux=[x(1,i),x(2,i)];
val=abs(sol(aux)-q(i));
sum =sum + val^2;
end
%      print*, 'en norl2_bis u=',b(mm1),b(mm2),b(mm3)

%      coef.y jacobiano de la matriz de paso al elem. de referencia
%
xnorl2=xnorl2+sum*deter/6;

end

```

```
xnorl2=sqrt(xnorl2);
fprintf('\nNorma L2: %e \n',xnorl2);
```

```
return
```

```
end
```

```
norh1
```

```
function xnorh1=norh1(nel,mm,z,b,gradsol)
%external gradiente
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% calculo del error en norma H^1
% formula de los puntos medios
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% nel      elementos
% mm      mm(1:3,k) vertices del elemento k
% z      z(1:2,i)  coordenadas del nodo i
% b      solucion aproximada
% gradsol gradiente
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
xnorh1=0;
for k=1:nel;
%
%   calculos previos
%
mm1=mm(1,k);
mm2=mm(2,k);
mm3=mm(3,k);
% print*, 'k=',k,mm1,mm2,mm3
for i=1:2;
z1(i)=z(i,mm1);
z2(i)=z(i,mm2);
z3(i)=z(i,mm3);
```

```

end
b1=b(mm1);
b2=b(mm2);
b3=b(mm3);
%
% puntos medios
%
x(1,1)=(z1(1)+z2(1))*0.5;
x(2,1)=(z1(2)+z2(2))*0.5;
x(1,2)=(z3(1)+z2(1))*0.5;
x(2,2)=(z3(2)+z2(2))*0.5;
x(1,3)=(z1(1)+z3(1))*0.5;
x(2,3)=(z1(2)+z3(2))*0.5;

ab=z2(1)-z1(1);
bc=z2(2)-z1(2);
cd=z3(1)-z1(1);
de=z3(2)-z1(2);
deter=ab*de-bc*cd;

% call gradel(ab,bc,cd,de,z1,z2,z3,b1,
%      &          b2,b3,g1,g2)
g1=((b2-b1)*de-(b3-b1)*bc)/deter;
g2=(-(b2-b1)*cd+(b3-b1)*ab)/deter;

sum=0;
for i=1:3;
dsol(1:2,i)=gradsol(x(1:2,i));
dsol(1,i)= dsol(1,i)- g1;
dsol(2,i)= dsol(2,i)- g2;
sum =sum + dsol(1,i)*dsol(1,i)+dsol(2,i)*dsol(2,i);
end
%      print*, 'en norh1 u=',b(mm1),b(mm2),b(mm3)

% coef.y jacobiano de la matriz de paso al elem. de referencia
%
```

```
xnorh1=xnorh1+sum*deter/6;
```

```
end
```

```
xnorh1=sqrt(xnorh1);
```

```
return
```

```
end
```

resul5ordenNR3.txt

No se pondrá debido a su gran tamaño.

Bibliografía

- [AB84] O. Axelsson and V.A. Barker. *Finite Element Solution of Boundary Value Problems*. Academic Press, 1984.
- [Bre84] H. Brezis. *Análisis Funcional*. Alianza Editorial, 1984.
- [Cia91] P. G. Ciarlet. Basic error estimates for elliptic problems. In *Handbook of numerical analysis, Vol. II*, pages 17–351. North-Holland, 1991.
- [KC91] D. Kincaid and W. Cheney. *Numerical Analysis*. Brooks/Cole, 1991.
- [LL02] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Teoría de la elasticidad*. Reverté, 2002.
- [Oll20] M. Olli. *Finite element method, Matlab implementation*. <http://users.jyu.fi/olju-mali/teaching/TIES594/06/FEM2.pdf>, 08/02/2020.
- [QS06] A. Quarteroni and F. Saleri. *Cálculo científico con Matlab y Octave*. Springer, 2006.
- [RT83] P.-A. Raviart and J.-M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, 1983.
- [SY06] W. Sun and Y. Yuan. *Optimization Theory and Methods, Nonlinear Programming*. Springer, 2006.
- [VF] J.M. Viaño and J. Figueiredo. *Implementação do Método de Elementos Finitos*. Universidade de Santiago de compostela, Universidade do Minho.